Logik I

Cornelis Menke

Bielefeld 2018 (v.20.01)

Inhalt

Logische Folgerung und logische Form

1. Die logische Folgerung
2. Über Aussagen
3. Formale Logik: Logische Formen

Aussagenlogik

4. Aussagenlogik: Wahrheitsfunktionen
5. Die Syntax der Aussagenlogik
6. Semantik der Aussagenlogik
7. Semantische Eigenschaften von Sätzen
8. Semantische Beziehungen zwischen Sätzen
9. Metalogik
10. Logische Analyse und Rekonstruktion

Prädikatenlogik

11. Die prädikatenlogische Form
12. Prädikatenlogische Sprachen
13. Semantik prädikatenlogischer Sprachen
14. Die Ausdrucksfähigkeit der Prädikatenlogik: ein Beispiel
15. Logik der Prädikatenlogik

Kalküle

16. Kalküle
17. Sequenzen-Kalkül (Aussagenlogik)

Anhänge

A. Venn-Diagramme
B. Präsuppositionen
C. Literatur
D. Symbole
Nachbemerkung

1. Die logische Folgerung

1.1. Zusammenfassung
1.2. Die Beziehung der logischen Folgerung
1.3. Terminologie und Schreibweisen
1.4. Prämissen und Konklusion
1.5. Objekt- und Metasprache
1.6. Definitionen und Explikationen
1.7. Semantische Explikation der Beziehung der logischen Folgerung
1.8. "Notwendig" ("ἐξ ἀνάγκης")
1.9. Vorbemerkungen zur logischen Form

1.1. Zusammenfassung

Es gibt **zwingende (gültige, korrekte) Argumente (Schlüsse, Folgerungen)**: Argumente, bei denen, wenn etwas (die **Prämissen**) gegeben ist, etwas anderes (die **Konklusion**) 'zwingend' folgt. Dies bedeutet, daß ein zwingendes Argument immer aus zwei Teilen besteht: erstens Aussagen (Prämissen und Konklusionen), und zweitens einer Beziehung zwischen diesen Aussagen: der **Beziehung der logischen Folgerung**.

Von einem Argument zu sagen, es sei gültig, ist demnach eine Aussage über eine Beziehung zwischen Aussagen – man unterscheidet daher zwei Sprachebenen: die **Objektsprache** von Prämissen und Konklusion, und die **Metasprache**, in der behauptet wird, daß zwischen diesen eine bestimmte Beziehung besteht.

Die Logik präzisiert (**expliziert**) diese Beziehung durch die Definition der **logischen oder semantischen Folgerung**: eine korrekte oder gültige logische Folgerung liegt vor, wenn es nicht möglich ist, daß die Prämissen (alle) wahr, die Konklusion aber falsch ist. Diese Definition ist der wichtigste Punkt dieses Kapitels.

Aus dieser Definition folgen die zentralen Merkmale gültiger Argumente: Gültige Argumente sind **wahrheitserhaltend**. Argumente können gültig sein, obwohl ihre Prämissen falsch sind. Umgekehrt kann auch ein Argument mit wahren Prämissen und wahrer Konklusion ungültig sein. Schließlich ergibt sich aus der Definition, daß Prämissen und Konklusion etwas sein müssen, das entweder wahr oder aber falsch ist: **Aussagen**.)

1.2. Die Beziehung der logischen Folgerung

Am Anfang der Logik steht eine Beobachtung. Betrachten Sie die folgenden Aussagesätze:

All men must die.
All kings are men.
———————————
All kings must die.

Zwischen den Aussagesätzen scheint ein Zusammenhang der Art zu bestehen, daß der durch einen Strich abgetrennte jeweils letzte Aussagesatz *zwingend aus den vorangehenden folgt.* Aristoteles hat diesen Zusammenhang in der sogenannten *Ersten Analytik* (einer seiner Abhandlungen zur Logik) in einer klassischen Formel ausgedrückt:

> συλλογισμὸς δέ ἐστι λόγος ἐν ὧι τεθέντων τινῶν ἕτερόν τι τῶν κειμένων ἐξ ἀνάγκης συμβαίνει τῶι ταῦτα εἶναι.[1]

> Ein Syllogismos[2] ist eine Rede (ein Argument), in der, wenn etwas gesetzt wurde, etwas von dem Gesetzen verschiedenes mit Notwendigkeit folgt [...].[3]

Die von Aristoteles beschriebene Eigenschaft wird die **Beziehung der logischen Folgerung** genannt. Die **Logik** ist die **Lehre von der Natur der Beziehung der logischen Folgerung**. Dies setzt voraus, daß diese Natur nicht so klar ist, wie es auf den ersten Blick scheinen mag.

1.3. Terminologie und Schreibweisen

Reden – Argumente, Schlüsse, Folgerungen – mit dieser Eigenschaft werden wir **zwingende Schlüsse**, **gültige Argumente** oder **korrekte logische** oder einfach **logische Folgerungen** nennen – ohne uns mit dem Versuch einer Definition, was genau ein Argument (ein Schluß, eine Folgerung) sei, weiter aufzuhalten. (Die Logik betrachtet die Natur der logischen Folgerung; Argumente von (z. B.) Minneliedern abzugrenzen, ist nicht ihr Interesse. Die Beziehung der logischen Folgerung kann zudem auch zwischen Aussagen in Minneliedern gegeben sein.) Andere geläufige Ausdrücke sind: **deduktiv gültige Argumente** oder kurz **Deduktionen**.

Anmerkung: Deduktive und induktive Gültigkeit. Von 'deduktiv gültigen Argumenten' spricht man meist im Gegensatz zu 'induktiv gültigen', d. h. solchen, in

[1] Aristoteles, *Analytica Priora* 24 b18–20 (Ross); vgl. die Formulierung in Aristoteles, *Topik* I 1, 100a 25–27.

[2] Das griechische συλλογισμός ist hier bewußt mit der griechischen Endung '-os' als 'Syllogismos' wiedergegeben, nicht in der latinisierten Form als 'Syllogismus', da 'Syllogismus' heute nur zur Bezeichnung bestimmter Argumente verwendet wird.

[3] Übersetzung C.M.

denen das Gesetzte das daraus folgende nicht erzwingt, sondern 'wahrscheinlich' oder 'plausibel macht' (was immer das genau heißt). Bei diesem Sprachgebrauch ist 'Gültigkeit' also nicht dasselbe wir 'logische Korrektheit'.

Hintergrund: Oft beginnt man in der Logik nicht mit der Bestimmung der logischen Folgerung, sondern mit der Bestimmung von Argumenten. Der Grund dafür ist, daß man dann auch weitere, eben 'induktiv gültige' Argumente mitbehandeln kann – entweder, weil man an eine 'induktive Logik' glaubt – man möchte also auch Argumente behandeln können, in denen die Prämissen 'gute Gründe' für die Konklusion sind, nicht aber zwingende –, oder, um die Logik mit der Argumentationstheorie zu verschränken.[4] Kurz: Man möchte eine Theorie der *Begründung* von Aussagen durch Aussagen, nicht (nur) eine Theorie der logischen Folgerung. Eine Folge dieses Ansatzes ist eben ein anderer Sprachgebrauch: Ein 'korrektes' Argument muß nicht notwendig ein gültiges sein – der Begriff des 'korrekten' Argument ist weiter.[5] Die Frage des Zusammenhangs von Begründung und Folgerung ist aber nicht ohne Schwierigkeiten, und reicht weit in die Metalogik, Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie – wir stellen sie daher nicht an den Anfang der Untersuchung.

1.4. Prämissen und Konklusion

Das, was bei einer logischen Folgerung 'gesetzt' wird, bezeichnet man als die **Prämissen** (premis(s)es, Sg. AE premise, BE premiss) der Folgerung; das, was aus dem Gesetzten 'mit Notwendigkeit' folgt, als die **Konklusion** (conclusion):

All men must die.	Prämisse
All kings are men.	Prämisse
All kings must die.	Konklusion

Prämissen und Konklusionen sind **Aussagen** (im weiten Sinn) – sie sind (irgend)etwas, was **wahr** oder **falsch** sein kann. Man spricht auch davon, daß Aussagen **wahrheitsdefinit** sind, d. h. daß sie genau einen der **Wahrheitswerte** wahr bzw. falsch annehmen können.

Anmerkung: Aussagen sind wahr oder falsch; ein Argument ist gültig oder nicht gültig. Die Beziehung der logischen Folgerung, die zwischen Prämissen und Konklusion besteht, kann nicht wahr oder falsch genannt werden – sie ist eine Beziehung (ein Zusammenhang, eine Relation), die zwischen Aussagen entweder besteht

[4] Vgl. etwa die Bestimmung in Salmon, S. 3: 'Logic is concerned with an objective relation between *evidence* and conclusion.' (Meine Hervorhebung).

[5] Ib., S. 4: 'In a logically correct argument, the premises have the following relation to the conclusion: *If the premises are true, this fact would constitute good grounds for accepting the conclusion.*' (Hervorhebung im Original.)

(bei gültigen bzw. korrekten Folgerungen) oder nicht (bei unkorrekten bzw. ungültigen Folgerungen).

Schreibweisen: Die Beziehung der logischen Folgerung zwischen Aussagen kann verschieden zum Ausdruck gebracht werden: Eine Möglichkeit ist der oben verwendete Folgerungsstrich; oft markiert man aber auch die Konklusion durch ein Folgerungszeichen (∴):

All men must die.
All kings are men.
∴ All kings must die.

Man kann die Folgerungsbeziehung auch einfach verbal ausdrücken, z. B. durch die Adverbien 'also', 'folglich', 'ergo', 'somit' usw.:

All men must die.
All kings are men.
Folglich: All kings must die.

1.5. Objekt- und Metasprache

Der Folgerungs- oder Schlußstrich, das Folgerungszeichen (∴) und Folgerungs-Adverbien stehen nicht auf der gleichen Sprachebene wie die Aussagen selbst – sie drücken Aussagen über Aussagen aus. Man sagt, sie gehören zur sog. **Metasprache** im Gegensatz zur **Objektsprache**, in der Prämissen und Konklusionen stehen. (Im letzten Beispiel ist die Objektsprache das Englische, die Metasprache das Deutsche.) Die Logik allgemein und die formale Logik im besonderen macht Aussagen über Aussagen – etwa die, daß zwischen bestimmten Aussagen (formuliert in der Objektsprache) bestimmte Zusammenhänge bestehen (formuliert in der Metasprache).

Wenn man nicht beschließt, verschiedene Sprachen zu verwenden (etwa Deutsch und Englisch), kann es zu Unklarheiten kommen; in diesem Fall unterscheidet man die beiden Ebenen, indem man die Ausdrücke der Objektsprache in Anführungszeichen setzt. Man sagt, der Ausdruck wird nicht **verwendet** (use), sondern nur **erwähnt** (mention). Die Anführungszeichen werden wir weglassen, wenn die Unterscheidung von Objekt- und Metasprache eindeutig ist (dies ist sie zumal in Formeln).

Man kann sich (in der Metasprache) für verschiedene Gesichtspunkte interessieren, z. B.:

'Theaitetos sitzt.' ist ein deutscher Aussagesatz. (Linguist)

'Theaitetos sitzt.' ist grammatisch korrekt. (Grammatiker)

‘Theaitetos sitzt.’ ist Platons Beispiel für einen Aussagesatz. (Philosophiehistoriker [6])

‘Theaitetos sitzt.’ ist eine Aussage. (Semantiker)

‘Theaitetos sitzt.’ ist ein gut gewähltes Beispiel für ein einfache Aussage (Didaktiker)

‘Theaitetos sitzt.’ hat die logische Form Sx. (Logiker)

In der Logik sind diejenigen Gesichtspunkte von Interesse, die mit der Beziehung der logischen Folgerung zusammenhängen – dies sind v. a. zwei:

Erstens sind Gesichtspunkte interessant, die die **semantischen Eigenschaften** einer Aussage betreffen: Was die Aussage bedeutet, und ob die Aussage daher wahr oder falsch ist.

Zweitens sind Gesichtspunkte interessant, die die **syntaktischen Eigenschaften** von Aussagen betreffen: Wie die Aussagen aufgebaut oder gebildet sind.

1.6. Definitionen und Explikationen

Unter **Definition** soll ein Vorschlag zur Festsetzung der Bedeutung/des Gebrauchs eines Ausdrucks verstanden werden.[7] Der zu bestimmende Ausdruck heißt **Definiendum**, der Bestimmungsvorschlag **Definiens**. Definitionen (in diesem Sinn) sind nicht wahr-oder-falsch, sondern Setzungen. Besonders deutlich ist dies bei sog. stipulativen Definitionen: ‘Sei $\mathcal{P}(A)$ die Wahrscheinlichkeit von A.’

Eine Form der Definition – und die in der Wissenschaft wichtigste – ist die **Explikation** (explication); Explikationen dienen der Präzisierung eines Sprachgebrauchs. Der gegebene Ausdruck heißt **Explikandum**, der präzisere, der diesen ersetzen soll, das **Explikat**. Die Ausdrücke gehen auf Rudolf Carnap (1950) zurück, der vier Adäquatheitskriterien nennt: **Ähnlichkeit**, **Exaktheit**, **Fruchtbarkeit** und **Einfachheit**:

> 1. Das Explikat muß dem Explikandum so weit *ähnlich* sein, daß in den meisten Fällen, in denen bisher das Explikandum benutzt wurde, statt dessen das Explikat verwendet werden kann. [...] 2. Die Regeln für den Gebrauch des Explikats müssen in *exakter* Weise gegeben werden. [...] 3. Das Explikat soll *fruchtbar* sein, d. h. die Formulierung möglichst vieler genereller Aussagen gestatten. [...] 4. Das Explikat soll so *einfach* wie möglich sein.[8]

[6] Platon, *Theaitetos* 263 a.

[7] Dies ist selbst eine Definition (im vorgeschlagenen Sinn); den Ausdruck ‘Definition’ könnte man auch weiter fassen und z. B. sog. lexikalische (analytische) Definitionen einschließen, d. h. Bestimmungen des tatsächlichen Sprachgebrauchs.

[8] Rudolf Carnap, *Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit*, Wien 1959, S. 12–18; hier: S. 15; Hervorhebungen im Original. Ursprünglich in: Rudolf Carnap, *Logical Foundations of Probability*, Chicago u. a. 1950, S. 3–8. Terminologie im Englischen: Das ‘explicatum’ solle ‘*similar to the explicandum*’, ‘*exact*’, ‘*fruitful*’ und ‘as *simple* as possible’ sein (ibid., S. 7; Hervorhebungen im Original).

1.7. Semantische Explikation der Beziehung der logischen Folgerung

Das folgende Definition der **semantischen Folgerung** ist die klassische Explikation der logischen Folgerung:

Definition: Zwischen Prämissen und Konklusion eines Arguments besteht genau dann eine **(gültige) logische Folgerungsbeziehung** (ein Argument ist gültig genau dann), wenn gilt: **Wenn die Prämissen wahr sind, dann ist die Konklusion wahr.**

Der Ausdruck 'genau dann … wenn' ('gdw.') ist ein technischer Ausdruck (häufig verwendet man auch 'dann und nur dann … wenn'): Er besagt, daß die angegebenen Bedingungen ('Wenn die Prämissen wahr sind, dann ist die Konklusion wahr.') für den Gebrauch des definierten Ausdrucks ('korrekte logische Folgerung') sowohl notwendig als auch hinreichend sind.

Diese Definition läßt sich als Explikation des Begriffs des 'zwingenden Schlusses' (des Explikandums) begreifen: Sie beansprucht, die meisten Fälle, in denen man von zwingenden Schlüssen sprechen würde, einzufangen (Ähnlichkeit); sie faßt, was das 'Zwingende' dieser Schlüsse ausmacht, genauer (Exaktheit); sie gestattet, wie sich zeigen wird, allgemeine Aussagen zu formulieren (Fruchtbarkeit); und sie ist vergleichsweise einfach (Einfachheit).

Aus dieser Definition der logischen Folgerung ergeben sich die folgenden Merkmale logischer Folgerungen:

1. Gültige Argumente sind **wahrheitserhaltend**. Es ist nicht möglich, daß die Prämissen wahr, die Konklusion aber falsch ist.

2. Für die Frage, ob eine logische Folgerungsbeziehung zwischen Prämissen und Konklusion besteht, ist **unbedeutend, ob die Prämissen wahr sind** oder nicht. Es wird allein gefordert, daß *wenn* die Prämissen wahr sind, es *dann* auch die Konklusion ist.

Argumente mit falschen Prämissen und wahrer Konklusion können also gültig sein:

Alle Griechen waren Philosophen.
Aristoteles war ein Grieche.

Aristoteles war ein Philosoph.

Argumente mit falschen Prämissen und falscher Konklusion können ebenfalls gültig sein:

Alle Insekten sind Zweibeiner.
Alle Zweibeiner sind Kiemenatmer.

Alle Insekten sind Kiemenatmer.

Es folgt auch, daß es nicht gültige Argumente geben kann, die sowohl wahre Prämissen wie auch eine wahre Konklusion haben:

Einige Griechen waren Philosophen.
Aristoteles war ein Grieche.

Aristoteles war ein Philosoph.

3. Ob die Prämissen wahr oder falsch sind, ist daher auch nicht Gegenstand der Logik. Man nennt gültige Folgerungen aus wahren Prämissen **schlüssig** (sound) – aber der Begriff der Schlüssigkeit ist strenggenommen kein Begriff der Logik als Lehre der logischen Folgerung.

4. Daß man überhaupt (wie wir es oben einfach gemacht haben) von den Prämissen und der Konklusion eines Arguments annimmt, daß dies **Aussagen** seien – also wahrheitsdefinit, wahr oder falsch – , ist ebenfalls durch diese Explikation der logischen Folgerung bedingt: Nur wenn Prämissen und Konklusion wahrheitsdefinit sind, läßt sich von einer Beziehung der logischen Folgerung zwischen ihnen in diesem Sinn sprechen.

1.8. "Notwendig" ("ἐξ ἀνάγκης")

Aristoteles verwendete die Formulierung, bei einem gültigen Argument müsse etwas anderes 'ἐξ ἀνάγκης' – 'zwingend' oder 'mit Notwendigkeit' – aus dem Gesetzen folgen. Viele Logiker bevorzugen eine Definition der semantischen Folgerung, die diese Formulierung aufnimmt, und definieren:

> Ein Argument ist gültig genau dann, wenn gilt: Wenn die Prämissen wahr sind, dann ist die Konklusion *notwendig* wahr (*muß* die Konklusion wahr sein).

Eine weitere, oft verwendete Formulierung ist:

> Ein Argument ist gültig genau dann, wenn gilt: Es ist *nicht möglich*, daß die Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch ist.

Man versteht dabei (wiederum seit Aristoteles) die Ausdrücke 'notwendig' und 'nicht möglich' als eng verwandt: 'Es ist notwendig, daß X' soll dasselbe bedeuten wie 'Es ist nicht möglich, daß nicht X'.

Die hier gegebene Definition von 'Gültigkeit' ist hingegen schlanker:

> Ein Argument ist gültig genau dann, wenn gilt: Wenn die Prämissen wahr sind, dann *ist* die Konklusion wahr.

Durch die verdeutlichenden Zusätze 'notwendig' bzw. 'nicht möglich' soll zunächst eines zum Ausdruck gebracht werden: daß es nämlich keine Ausnahmen gibt. Ein Argument ist nur gültig, wenn *ausnahmslos, immer und unter allen Umständen* gilt:

Wenn die Prämissen wahr sind, dann ist die Konklusion wahr.

Die Bestimmung ist dennoch noch immer mißverständlich: Da es z. B. keine Perpetua mobile gibt, könnte man z. B. schließen: 'Der Jesuit Athanasius Kircher versuchte, ein Perpetuum mobile zu konstruieren. *Also:* Athanasius Kircher scheiterte mit diesem Versuch.' In einem gewissen Sinn ist nicht möglich, daß die Prämisse wahr ist, die Konklusion aber falsch. Diese Form der Unmöglichkeit ist aber in der Logik nicht gemeint.

Man sagt daher oft erläuternd, mit 'Unmöglichkeit' sei die 'logische Unmöglichkeit' (auch: 'Widersprüchlichkeit') gemeint; und analog sei mit 'Notwendigkeit' die 'logische Notwendigkeit' gemeint. Dies lädt zu der Entgegnung ein, diese Bestimmung sei zirkulär: Gegenstand der Logik sind die gültigen Schlüsse; gültig sind Schlüsse, bei denen die Konklusion 'mit Notwendigkeit' aus den Prämissen folgt; mit 'Notwendigkeit' ist die 'logische Notwendigkeit' gemeint, also die für die Logik charakteristische Notwendigkeit.

Aber der Einwand ist vielleicht vorschnell: Zirkulär wäre die Bestimmung nur dann, wenn sich über 'logische Notwendigkeit' bzw. 'logische Unmöglichkeit' nichts weiter sagen ließe, als daß es die für die Logik charakteristische Notwendigkeit sei. Gültige Schlüsse lassen sich aber weitergehend charakterisieren:

Gültige Schlüsse sind **monoton**.

Mit 'monoton' ist gemeint, daß sie gültig bleiben, wenn man weitere Prämissen hinzufügt; m.a.W., die Beziehung der logischen Folgerung besteht oder besteht eben nicht zwischen bestimmten Prämissen und einer Konklusion, und mehr als die Prämissen und die Konklusion braucht und muß man nicht wissen, um dies zu beurteilen.

Betrachten wir noch einmal das Beispiel 'Der Jesuit Athanasius Kircher versuchte, ein Perpetuum mobile zu konstruieren. *Also:* Athanasius Kircher scheiterte mit diesem Versuch'. Die Aussage, es sei nicht möglich, daß die Prämisse wahr ist, die Konklusion aber falsch, setzt eine weitere Prämisse voraus ('Es gibt keine Perpetua mobile'). Es ist also nicht gültig.[9]

Wenn man allein anhand der Prämissen und der Konklusion feststellen kann, daß die Konklusion wahr ist, wenn es die Prämissen sind, dann ist der Schluß auch logisch notwendig order zwingend: In diesem Sinn bringen die drei genannten Definitionen dasselbe zum Ausdruck.

[9] Statt von 'logischer Notwendigkeit' spricht man auch von 'analytischer Notwendigkeit' im Gegensatz zur 'kausalen, physikalischen oder auch nomologischen (naturgesetzlichen) Notwendigkeit'. Der Sprachgebrauch klingt etwas künstlich; natürlicher ist es, davon zu sprechen, etwas sei kausal/physikalisch/nomologisch möglich. Auf den Sprachphilosophen Saul Kripke geht eine weitere Begriffsbildung zurück: die 'metaphysische Notwendigkeit'; ob es die wirklich gibt, sei dahingestellt. Vgl. zum Notwendigkeitsbegriff z. B. Tugendhat/Wolf, Kap. 14.

1.9. Vorbemerkungen zur logischen Form

In gewisser Weise ist es oft (nicht immer) **nicht einmal nötig, die Aussagen völlig zu verstehen**, um die Korrektheit einer Folgerung zu beurteilen:

All ἄνθρωποι are θνητοί.
All βασιλεῖς are ἄνθρωποι.

All βασιλεῖς are θνητοί.

Man muß nicht wissen, was die Ausdrücke ἄνθρωποι, θνητοί und βασιλεῖς bedeutet – nur, wie schon angedeutet, annehmen, daß gleiche Ausdrücke immer dasselbe (und verschiedene Verschiedenes) bedeuten.

Dies gilt aber nicht für alle Teile der Aussagen; einige Teile sind wesentlich:

Ἔνιοι men must die.
Ἔνιοι kings are men.

Ἔνιοι kings must die.

Wenn ἔνιοι 'alle' bedeutet, ist der Schluß gültig; bedeutet ἔνιοι 'einige', dann nicht.

Das, was man verstehen muß, um die Gültigkeit eines Arguments zu beurteilen, bezeichnet man die dessen **logische Form**. Die logische Form ist der grundlegende Begriff der **formalen Logik**; bevor wir uns dieser aber zuwenden, nehmen wir das zweite offene Ende dieses Kapitels auf und betrachten, was genau **Aussagen** sind.[10]

[10] Skeptischer zur Bedeutung der logischen Form: Bostock 2007, 5–6 (hier: 6): "My impression is that that suggestion [die Bedeutung der logischen Form] is not looked upon with much favour these days, because of the difficulty of making any suitable sense of the notion of 'form' being invoked."

2. Über Aussagen

2.1. Aussagen und Wahrheitswerte
2.2. Zweiwertigkeitsprinzip, Satz vom Widerspruch, Satz vom ausgeschlossenen Dritten
2.3. Was genau sind Aussagen?

2.1. Aussagen und Wahrheitswerte

Wir haben gesagt: Prämissen und Konklusionen sind **Aussagen** (im weiten Sinn [11]), und die logische Folgerung bestimmt als eine Beziehung zwischen Prämissen und Konklusionen der Art, daß es nicht möglich ist, daß die Prämissen wahr, die Konklusion aber falsch ist. Aussagen in diesem Sinn müssen dann etwas sein, wovon sich sagen läßt, daß es wahr oder falsch ist. Dies dies kann man als Definition von 'Aussagen' (im weiten Sinn) auffassen: [12]

> **Definition.** Eine **Aussage (im weiten Sinn)** ist (irgend)etwas, was entweder **wahr** oder **falsch** ist. Man spricht auch davon, daß Aussagen **wahrheitsdefinit** sind. '**Wahr**' und '**falsch**' bezeichnet man als die **Wahrheitswerte** einer Aussage.

Dies ist wiederum eine Explikation, also eine Festsetzung und Schärfung des Sprachgebrauchs. Sie ist exakt, einfach und fruchtbar, aber sie umfaßt nicht alles und nur das, was man für gewöhnlich 'Aussage' nennen würde.

2.2. Zweiwertigkeitsprinzip, Satz vom Widerspruch, Satz vom ausgeschlossenen Dritten

Der Definition von 'Aussage' liegt das sog. **Zweiwertigkeitsprinzip** zugrunde:

> **Zweiwertigkeitsprinzip:** Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Aus diesem Prinzip (also aus unserer Definition) folgen zwei Sätze über Aussagen (Metaaussagen): der Satz vom (ausgeschlossenen) Widerspruch und der Satz vom

[11] Der Zusatz 'im weiten Sinn' ist nötig, um den Begriff von Aussagen im engen Sinn – Propositionen – zu unterscheiden.

[12] Cohen/Nagel etwa definieren Aussage (proposition) als 'anything which can be said to be true of false' (S. 27).

ausgeschlossenen Dritten oder ‘tertium non datur’ (lat. ‘ein Drittes wird nicht gegeben’):

Satz vom Widerspruch. Keine Aussage ist wahr und falsch zugleich.

Tertium non datur. Eine Aussage ist entweder wahr, oder ihre Negation ist wahr.

Das umgekehrte gilt nicht: Aus dem Satz vom Widerspruch folgt nicht nicht das Zweiwertigkeitsprinzip, und auch aus dem tertium non datur nicht. Die drei Prinzipien bzw. Sätze sind also verschieden, und sie haben eine unterschiedliche Stärke.

Satz vom Widerspruch

Der **Satz vom Widerspruch** (law of non-contradiction) ist fundamental für die Logik; Aristoteles nannte ihn das sicherste aller Prinzipien.[13] Die Kehrseite davon ist, daß er der schwächste ist – keiner der anderen beiden folgt aus ihm. Er scheint den Begriff der Aussage nicht einzuschränken; m.a.W., er scheint für alles zu gelten, was man für gewöhnlich ‘Aussage’ nennen würde.

Tatsächlich könnte man bestimmte **paradoxe Sätze** als Ausnahmen betrachten wollen, z. B. den Satz ‘Dieser Satz ist falsch’. Betrachtet man diesen Satz als Aussage, scheint der Satz vom Widerspruch nicht für alle Aussagen zu gelten.[14] Man könnte aber auch sagen, Sätze dieser Art seien eben keine Aussagen. Wir untersuchen die Frage nicht weiter, sondern ignorieren diese Sätze einfach.

Tertium non datur

Das **Tertium non datur** (law of excluded middle) ist eine Einschränkung unseres Begriffs der ‘Aussage’. Es besagt, daß bei jedem *Paar von einer Aussage und deren Negation* eins von beiden wahr ist. Daß es sich um eine Aussage über ein *Paar* von Aussagen handelt, ist wichtig, um zu verstehen, warum das tertium non datur vom Zweiwertigkeitsprinzip unterschieden wird (s. u.).

Das Tertium non datur schließt bestimmte Sätze aus, die durchaus als Aussagen betrachtet werden könnten, nämlich **vage Aussagen**, z. B.: ‘Heinrich VIII. war dick’. Hier besteht die Schwierigkeit darin, daß nicht ganz klar ist, ob diese Aussage oder ihre Negation wahr ist – es könnte Fälle geben, wo man sagen möchte: ‘Beides nicht so recht (er ist nicht dick, aber er sollte aufpassen).’; siehe dazu unten. Um Sätze dieser Art logisch behandeln zu können, wurden sog. mehrwertige Logiken entwickelt, in denen das Tertium non datur (und damit das Zweiwertigkeitsprinzip) nicht gilt.[15]

[13] Aristoteles, *Metaphysik* 1005 b24. Vgl. etwa die Diskussion in Tugendhat/Wolf, Kap. 4.

[14] Der sog. Dialethismus (der Ausdruck geht auf Graham Priest u.a. 1981 zurück) etwa vertritt diese abweichende Sicht; motiviert ist dies nicht zuletzt durch die Betrachtung von Paradoxien des Selbstbezugs wie dem sog. Lügner-Paradox (‘Dieser Satz ist falsch.’; vgl. zur Paradoxie Sainsbury 2009, S. 127–129). Vom Dialethismus unterscheiden muß man sog. parakonsistente Logiken, die nicht den Satz vom Widerspruch aufgeben, sondern den *ex contradictione quodlibet*; s. u.

[15] Das Tertium non datur gilt ebenfalls nicht in sog. intuitionistischen Logiken, die Widerspruchs-

Zweiwertigkeitsprinzip

Das **Zweiwertigkeitsprinzip** (principle of bivalence) ist das logisch stärkste der drei Prinzipien bzw. Gesetze. Es fordert von jeder *einzelnen Aussage*, daß sie genau eines von beiden ist: entweder-wahr-oder-falsch (nicht beides, und nicht keins von beiden).

Zum **Unterschied** von Zweiwertigkeitsprinzip und Tertium non datur: Nicht immer wird zwischen Zweiwertigkeitsprinzip und Tertium non datur streng unterschieden.[16] Wenn man beide unterscheidet, dann meist aus einem oder beiden der folgenden Gründe:

(i) Das Zweiwertigkeitprinzip kann man 'stark' lesen: Demnach besagt es, daß jede (beliebige aber) bestimmte Aussage 'A'[17] **einen bestimmten** der beiden Wahrheitswerte **hat** (und zwar, weil die Welt ist, wie sie ist); es ist ein semantisches Prinzip.

Eine Aussage wie 'Es wird morgen eine Seeschlacht geben, oder es wird morgen keine Seeschlacht geben'[18] ist dann nach dem Tertium non datur wahr (eins von beiden wird passieren). Man muß aber nicht zugleich auch die Auffassung vertreten, die (Einzel-)Aussage 'Morgen wird es eine Seeschlacht geben' habe – heute schon – einen bestimmten der beiden Wahrheitswerte, wie es das Zweiwertigkeitsprinzip in dieser Lesart fordert. (Ein modernes Beispiel wären vielleicht Voraussagen der Quantenmechanik, die besagen, daß quantenmechanische Gegenstände bestimmte Eigenschaften nicht haben, solange man sie nicht mißt (!).) Es gäbe also bestimmte Aussagen, die dem Tertium non datur gehorchen, nicht aber dem Zweiwertigkeitsprinzip.

(ii) Das Zweiwertigkeitsprinzip kann man aber auch 'schwach' lesen: Demnach besagt es nur, daß eine (beliebige aber) bestimmte Aussage 'A' **einen der beiden** Wahrheitswerte hat. Dies klingt, als wäre es mit dem Tertium non datur eng verwandt; jedenfalls gibt es nicht zwingend eine Klasse von Aussagen, die dem Tertium non datur gehorchen, dem Zweiwertigkeitsprinzip aber nicht.

Dennoch unterscheidet man beide oft, und zwar, weil das Zweiwertigkeitsprinzip eine Metaaussage über eine beliebige aber bestimmte Aussage 'A' ist. Das Tertium non datur hingegen ist eine Aussage über einen beliebigen **komplexen Satz der Form** 'A oder nicht-A' : nämlich die Aussage, dieser komplexe Satz sei wahr, ganz unabhängig, welche Aussagen man für den 'Platzhalter' A einsetzt. (Die formalen Schreibweisen, wie wir verwenden werden, schon einmal vorweggenommen: Das Tertium non datur macht eine Aussage über Sätze der Form '$A \vee \neg A$' ('A oder nicht-A'). Um diesen

beweise nicht verwenden.

[16] Viele Autoren verwenden beide Ausdrücke synonym (vgl. v.B. Hoyningen-Huene, 30–32).

[17] Bitte beachten Sie hier, daß 'A' nicht kursiv geschrieben ist: Es ist einfach eine Abkürzung für eine bestimmte Aussage, z. B. 'Brutus hat Caesar ermordet', nicht ein Platzhalter für beliebige Aussagen.

[18] Das berühmte Seeschlacht-Beispiel führt Aristoteles in *De Interpretatione*, Kap. 9, an. Vgl. zur Sache Tomassi, S. 123–124.

komplexen Satz überhaupt zu verstehen, muß man auch '$\neg$' ('nicht') und '$\vee$' ('oder') verstehen.)

Der Satz vom Widerspruch wäre analog eine Metaaussage über beliebige komplexe Sätze der Form '$\neg(A \wedge \neg A)$' ('nicht: A und nicht-A'), und besagt, daß diese Sätze wahr sind (den Wahrheitswert 'wahr' haben), unabhängig davon, welche Aussage man für den Platzhalter A einsetzt. Hier muß man zusätzlich auch das '$\wedge$' ('und') verstehen.)

Anmerkung: Keine der drei Meta-Aussagen besagt allerdings, daß man bestimmen oder angeben könnte, ob eine Aussage wahr oder falsch ist. Es gibt viele Aussagen, die sinnvoll sind und vermutlich wahr-oder-falsch, deren Wahrheitswert man aber wohl nie wird klären können, z. B.: 'Die Anzahl der Zahnstocher an Bord der *RMS Titatic* war zum Zeitpunkt ihrer Kollision mit einem Eisberg am 2. April 1912 ungerade.' [19]

2.3. Was genau sind Aussagen?

Die Definition von Aussagen läßt aber noch ein vieles offen – denn es gibt mehrere Kandidaten für etwas, was wahr-oder-falsch ist (bzw. sein kann), was 'Träger der Wahrheit' (truth bearer) ist: [20]

(i) Sätze (sentences)

Unsere bisherigen Beispiele von Aussagen (als Prämissen und Konklusionen von Argumenten) waren **Sätze**; mit Satz gemeint ist etwa ein bestimmter Aussagesatz, aber unabhängig von seinem Kontext (wenn das geht), etwa ein Übungssatz in einem Sprachkurs oder ein Zitat.

Kann man Sätze und Aussagen (im weiten Sinn unserer Definition) einfach identifizieren? Nein.

Erstens: Es gibt eine Reihe von Sätzen, die nicht unter die Definition der Aussage (im weiten Sinn) fallen, da sie nicht (oder nicht klar) wahrheitsdefinit sind: Ausnehmen muß man zunächst natürlich Fragesätze, Aufforderungen, Gebete uam. Hier genügt es dann auch nicht, statt von 'Sätzen' von 'Aussagesätzen' zu sprechen – es gibt Aussagen, die die Form eines Fragesatzes haben, umgekehrt Fragen, die sich in Aussagesätzen verstecken, Fragen, die Aufforderungen zum Ausdruck bringen usw. Die Form eines Satzes und die Sprechhandlung (der **Sprechakt**) stimmen nicht immer überein:

'Könntest du mir das Salz reichen?' ist eine Aufforderung, ebenso 'Will You Please Be

[19] Einigen Vertretern des sog. Pragmatismus zufolge macht man sich freilich etwas vor, wenn man von Sätzen, deren Wahrheitswert man prinzipiell nicht bestimmen kann, sagt, sie seien wahr oder falsch; aber diese Frage zu erörtern würde hier zu weit führen.

[20] Vgl. zum folgenden: Hoyningen-Huene, 32–34.

Quiet, Please?'; 'Wann wird es endlich wieder Sommer?' ist ein Wunsch; 'Es zieht!' ist eine Aufforderung, keine Aussage, ebenso 'Sie melden sich umgehend beim Zugführer'. 'Wie könnte es anders sein?' drückt Zustimmung aus, ist also eine Aussage, 'Ja, is' denn heut' scho' Weihnachten?' ebenso.

Zweitens: Sätze können einen unbestimmten Wahrheitswert haben. Eine Klasse von Aussagesätzen, die unbestimmt sind, sind Aussagesätze mit sog. **indexikalischen Ausdrücken** ('ich', 'hier', 'heute' usw.): Der Aussagesatz 'Es regnet gerade' ist wahr oder auch falsch, je nachdem, wann und wo er geäußert wird. (Betrachtet man den Satz als Äußerung, dann wiederum nicht.) Nicht immer treten die indexikalischen Ausdrücke explizit auf: 'Es regnet gerade' läßt sich ohne großen Verlust verkürzen zu 'Es regnet'; 'Es regnet hier' ist geradezu übertrieben explizit, wenn man nicht etwa gerade telephoniert.

Dies gilt nicht allein für Aussagesätze mit indexikalischen Ausdrücken: Der Satz 'Im Juli steht die Sonne hoch' z. B. hängt von der geographischen Breite ab, auf die er sich bezieht. Nicht notwendig davon, an welchem Ort er geäußert wurde – im Buch *Archipiélago de Colón – Inselparadies am Äquator* ist er sinnlos (die Sonne steht immer gleichhoch), im Buch *Die Bezwingung des Südpols* falsch (keine Sonne im Juli).

Drittens: Der Wahrheitswert eines Aussagesatzes kann (wie gesagt) auch aufgrund der **Vagheit** der Aussage unklar sein: 'Heinrich der VIII. war dick' ist gleich in mehrfacher Hinsicht vage: Er läßt zum einen offen, *wann* die Aussage zutreffen soll (als Jugendlicher? bei seiner Krönung?); dann ist aber aber nicht eindeutig bestimmt, wie dick 'dick' ist (Adipös im medizinischen Sinn? Stark adipös? gegeben die Normen des Englands des 16. Jahrhunderts? für einen König?) – selbst wenn der Bezugsmaßstab bestimmt wäre, bliebe Vagheit ein Problem ('Wenn Heinrich VIII. nicht dick ist, dann wäre er auch nicht dick, wenn er 10 Gramm zunähme. Dann aber auch nicht, wenn er (nochmals) 10 Gramm zunähme. Dann aber auch nicht mit noch 10 Gramm mehr, usw.').

Man kann also nicht einfach (Aussage)Sätze und Aussagen identifizieren; ganz allgemein steht man vor dem Problem, daß die Bedeutung eines Satzes vom Kontext abhängt, ohne den man i.d.R. nicht nur nicht sagen kann, ob der Satz wahr oder falsch ist, sondern nicht einmal, ob er überhaupt eine Aussage zum Ausdruck bringen soll.

(ii) Äußerungen (utterances)

Vielleicht sind Äußerungen ein besserer Kandidat für Aussagen (in weiten Sinn der Definition)? Unter Äußerung wird hier verstanden etwa eine bestimmte Äußerung eines Satzes zu einer bestimmten Gelegenheit, d. h. ein 'Text' in einem Kontext?

Da Äußerungen einen Äußerungskontext haben, stellen sich nicht nicht alle der Proble-

me, die sich bei Sätzen stellen (z. B. sind indexikalische Ausdrücke unproblematisch). Aber wiederum bringen nicht alle Äußerungen Aussagen zum Ausdruck – man müßte also angeben, welche Äußerungen als Aussagen betrachtet werden können.

Es wird sich wiederum zeigen, daß auch Äußerungen (wie auch Urteilsakte) nicht Gegenstand der Aussagenlogik sein können, oder besser: nicht fruchtbar aussagenlogisch zu behandeln sind (man muß sie nicht ausschließen – sie fallen einfach hinaus), denn Aussagen müssen wiederholt auftreten können, und dies tun Äußerungen gerade nicht. Diese Feststellung bezieht sich aber nur auf die Aussagenlogik.[21]

(iii) Urteilsakte und Urteile (judgments/judgements)

Urteilsakte und Urteile könnten Wahrheitsträger sein. 'Urteilsakt' bezeichnet ein bestimmtes psychologisches Ereignis oder Vorgang – den Akt des Beurteilens als wahr oder falsch –, von jemandem zu einem bestimmten Ort und zu einer bestimmten Zeit. 'Urteile' hingegen sind nicht raumzeitlich und personenbezogen bestimmte Vorkommen eines Urteilsaktes, sondern das, was bei mehreren Personen 'dasselbe' wäre, wenn sie 'zum gleichen Urteil' gelangen oder in einem Urteil übereinstimmen, also eine Abstraktion von Urteilsakten.

Es wird sich zeigen, daß Urteilsakte (wie Äußerungen) ebenfalls nicht Gegenstand der formalen Aussagenlogik sein können, oder besser: nicht fruchtbar aussagenlogisch zu behandeln sind (man muß sie also ebenfalls nicht ausschließen – sie fallen auch einfach hinaus); der Grund ist wieder der selbe: ein Urteilsakt ist ein einmaliges psychisches Ereignis und wiederholt sich nicht. (Diese Feststellung bezieht sich wiederum nur auf die Aussagenlogik.)

Urteile wären eigentlich schöne (und klassische) Kandidaten für Träger von Wahrheitswerten; sie sind aber – als Abstraktion von psychische Ereignissen – schwer greifbar unabhängig von Äußerungen oder Aussagesätzen.

(iv) Aussagen im engen Sinn/Propositionen (proposiitons)

Aussagen (im engen Sinn) oder **Propositionen** bezeichnen das, was wahr oder falsch ist unabhängig (abstrahiert) von einer Äußerung und deren Kontext, unabhängig davon, wie genau es sprachlich als Satz gefaßt wird (etwa im Aktiv oder Passiv), und ob es jemals jemand 'gedacht' hat. (M.a.W., Propositionen bezeichnen das Bestehen oder Nicht-Bestehen von 'Sachverhalten', einen 'Gedanken' usw.; Engl.: proposition). Propositionen sind klare Kandidaten für die gegebene Definition – sie sind dafür erfunden –, aber ebenfalls schwer greifbar unabhängig von Äußerungen oder Aussagesätzen, also wiederum eine Idealisierung.

Alle die genannten möglichen Träger von Wahrheitswerten sind also nicht unpro-

[21] Vgl. Hoyningen-Huene, 153–154.

blematisch: ihr Wahrheitswert hängt teils vom Kontext ab; berücksichtigt man den Kontext, wird es problematisch zu sagen, zwei Aussagen seien identisch; greifbar sind sie eigentlich nur in Form von Sätzen.

3. Formale Logik: Logische Formen

3.1. Aussagen, Sätze und Formeln
3.2. Logische Formen von Aussagen und Argumenten
3.3. Gültigkeit und formale Gültigkeit
3.4. Nicht-formal gültige Argumente
3.5. Enthymeme
3.6. Zusammenfassung

3.1. Aussagen, Sätze und Formeln

Im folgenden werden wir unterscheiden zwischen Aussagen, Sätzen und Formeln. Diese Unterscheidung liegt nicht auf der selben Ebene wie die im letzten Kapitel erörterten verschiedenen Wahrheitsträger – obwohl wir teils die selben Begriffe verwenden. Sie soll uns v. a. helfen, den Bereich der Logik und der formalen Logik sprachlich zu unterscheiden:

Aussagen: etwas, das etwas aussagt und das wahr oder falsch ist. Zeichen: Buchstaben als Abkürzung, z. B. 'A' (nicht kursiv), oder eine explizite Aussage, z. B. 'Brutus hat Caesar ermordet'. Zwischen Aussagen bestehen Beziehungen der logischen Folgerung.

Sätze, in der formalen Logik (semantisch): sprachlichen Ausdrücken, die sich als Aussagen interpretieren lassen; erst gemeinsam mit einer **Interpretation** haben sie einen Wahrheitswert (weil die Aussage einen hat). Zeichen: Platzhalter, sog. Satzbuchstaben (proposition letters), kursiv: A, B usw. Zwischen Sätzen (Satzschemata) bestehen Beziehungen der formalen (semantischen) Folgerung.

Formeln, in der formalen Logik (syntaktisch): Sprachlichen Ausdrücken unabhängig von jeder Interpretation, einfach als Zeichen (wie ein Computer sie 'verstünde'). Zwischen Formeln bestehen Beziehungen der formalen (syntaktischen) Folgerung.

(Nicht immer unterscheidet man in dieser Form zwischen Sätzen und Formeln; oft verwendet man nur einen Ausdruck für beides, bisweilen auch andere Ausdrücke, z. B. 'Aussageformen'.)

3.2. Logische Formen von Aussagen und Argumenten

Wir nehmen hier den Gedanken wieder auf, daß es Fälle gibt, in denen man – interessanterweise! – die Aussagen gar nicht zur Gänze verstehen muß, um zu beurteilen, ob eine logische Folgerung besteht – ob, wenn die Prämissen wahr sind, es auch die Konklusion ist. Unser Ziel ist im Folgenden, erste Überlegungen anzustellen, *was* man verstehen muß und was nicht.

Das, was man verstehen muß, um die Korrektheit einer Folgerung zu beurteilen, werden wir als die **logische Form** des Arguments bezeichnen. Die logische Form setzt sich aus zwei Teilen zusammen, die auf eine logische Analyse von Aussagen Bezug nehmen.

In der logischen Analyse von Aussagen werden wir zwei Teile bei den Aussagen eines Arguments unterscheiden: erstens den sog. **logischen Konstanten**, zweitens die sog. **nichtlogischen Konstanten**. Die Unterscheidung zeigt nicht notwendig 'die' logische Struktur, die eine Aussage 'hat', sondern ist 'eine' logische Struktur, die wir suchen, um Folgerungsbeziehungen untersuchen zu können. Eine Aussage kann also mehrere logische Formen haben; als Teil eines Arguments bietet sich aber oft eine bestimmte logische Analyse an.

Die logischen Konstanten muß man verstehen; von den nichtlogischen Konstanten muß man nur annehmen, daß gleiche Gleiches und verschiedene Verschiedenes bezeichnen. Beides zusammen macht die logische Form eine Aussage aus.

Behandeln werden wir im folgen die aussagenlogische Form und die prädikatenlogische Form; es gibt weitere (die der Modallogik, die der Klassenlogik u.v. a.m).

3.3. Gültigkeit und formale Gültigkeit

Gültigkeit wird ausgesagt von einem (bestimmten, spezifizierten) **Argument**: einem Argument, dessen Prämissen und Konklusion **Aussagen** sind. Diese Aussagen haben einen Sinn und daher einen bestimmten Wahrheitswert, und daher *ist* das Argument gültig oder nicht. Beispiel:

Bacon wrote *Hamlet*.	falsch
If Bacon wrote *Hamlet*, then Bacon was a great writer.	wahr
Bacon was a great writer.	wahr

Ansatz: In der formalen Logik versucht man, die Folgerungsbeziehung, die zwischen diesen Aussagen besteht, zu erhellen, indem man von Inhalt und Bedeutung derjenigen Teile der Aussagen abstrahiert, die man nicht verstehen muß, um die Gültigkeit zu beurteilen.

Einer (vor 100 Jahren populären) Theorie zufolge war William Shakespeare nur der Deckname des wahren Autors der ihm zugeschriebenen Dramen, nämlich Sir Francis Bacon. Hinge man dieser Theorie an, so wäre das genannte Argument dasselbe wie folgendes:

Shakespeare wrote *Hamlet*.	wahr
If Shakespeare wrote *Hamlet*, then Shakespeare was a great writer.	wahr
Shakespeare was a great writer.	wahr

Auch dieses Argument ist natürlich gültig; dies zeigt: Ob Shakespeare Bacon war (oder jemand anderes), ist dafür ganz unerheblich – Anhänger wie Gegner der Bacon-Theorie der Shakesspearschen Autorschaft würden die Gültigkeit gleich beurteilen. Man könnte statt 'Bacon' oder 'Shakespeare' auch einen **Platzhalter** ('X') einführen, und offenlassen, wie der zu interpretieren ist.

X wrote *Hamlet*.	wahr oder falsch [22]
If X wrote *Hamlet*, then X was a great writer.	wahr oder falsch [23]
X was a great writer.	wahr oder falsch [24]

Man kann jetzt nicht mehr sagen, daß die Prämissen bzw. die Konklusion wahr oder falsch sind – dies hängt davon ab, was man für 'X' einsetzt: wie man 'X' interpretiert (und davon, wie die Welt ist: wer *Hamlet* wirklich geschrieben hat).

Eine Folge davon ist, daß wir jetzt nicht mehr sagen können, die Prämissen und Konklusion seien Aussagen; wir nennen sie zur Unterscheidung **Sätze** (auch: Aussageformen oder Aussage-Schemata).

Aber wir können die Abstraktion auch weitertreiben, und einen weiteren Platzhalter einführen, z. B. für '*Hamlet*', oder für 'great' oder gleich 'was a great writer' usw. Die Gültigkeit bleibt bei all diesem erhalten. Schließlich könnten wir auch gleich Platzhalter anstelle der Aussagen 'Bacon wrote *Hamlet*' und 'Bacon was a great writer' verwenden:

A.	wahr oder falsch [25]
If A, then B.	wahr oder falsch [26]
B.	wahr oder falsch [27]

In all diesen Fällen läßt sich sagen, daß ein Argument, das man erhält, wenn man für die Platzhalter jeweils denselben Ausdruck einsetzt, gültig wäre. Von einem solchen

[22] Je nach Interpretation von X.
[23] Je nach Interpretation von X.
[24] Je nach Interpretation von X.
[25] Je nach Interpretation von A.
[26] Je nach Interpretation von A und B.
[27] Je nach Interpretation von A.

Argument sagt man, es sei **gültig aufgrund der logischen Form**: es entspricht einer formal gültigen Argumentform (auch: Argumentschema).

Formale Gültigkeit (Gültigkeit aufgrund der logischen Form) wird ausgesagt von einer (allgemeineren) **Argumentform** (einem Argumentschema): einer Argumentform, deren Prämissen und Konklusion (uninterpretierte) **Sätze** sind. Eine Argumentform ist formal gültig, wenn es unter jeder Interpretation der Platzhalter gilt: Wenn die Prämissen wahr sind, dann ist ist die Konklusion wahr.

Man kann dann auch *von einem Argument* sagen, daß es formal gültig ist, wenn es eine formal gültige Argumentform hat. Dies setzt voraus, daß man eine bestimmte Argumentform 'im Kopf hat' (die Beispiele zeigen ja, daß ein Argument nicht eine bestimmte logische Form hat; man kann es oft verschieden logisch analysieren).

3.4. Nicht-formal gültige Argumente

Viele Logiker sprechen nur dann von einem gültigen Argument, wenn dieses eine formal gültige Argumentform hat. Dies ist teils eine Frage des Sprachgebrauchs und damit einer (sinnvollen) *Setzung*; wir verwenden hier 'Gültigkeit' in einem weiteren Sinn, denn nicht in allen Fällen trifft zu, daß gültige Argumente sich offensichtlich als Instanzen formal gültiger Argumentformen deuten lassen:

Die Fenster der Marienkirche sind rot.

Die Fenster der Marienkirche sind farbig.

Ein Dreieck ist ein Polygon mit drei Ecken.

Ein Dreieck hat drei Seiten.

Johann weiß, daß Bacon *Hamlet* verfaßt hat.

Bacon hat *Hamlet* verfaßt.

Platon war ein Junggeselle.

Platon war unverheiratet.

Abraham war der Vater von Isaak, Isaak von Jakob,
Jakob von Juda und seinen Brüdern.

Abraham und Juda sind verwandt.[28]

In allen diesen Beispielen ist es nicht möglich, daß die Prämissen wahr, die Konklusion aber falsch ist; sie sind also in diesem Sinn gültig. Sie sind es aber nicht (jedenfalls

[28] Mt. 1,2.

nicht offenkundig) aufgrund ihrer logischen Form, sondern aufgrund der Bedeutung der (nicht-logischen) Ausdrücke. Ersetzt man diese Ausdrücke durch andere, müssen die Argumente nicht weithin gültig sein – vergleichen Sie z. B. 'Johann weiß, daß Bacon *Hamlet* verfaßt hat' mit 'Johann vermutet, daß Bacon *Hamlet* verfaßt hat' und 'Johann denkt irrtümlich, daß Bacon *Hamlet* verfaßt hat.' (Das Verb 'wissen' ist ein sog. faktives Verb, d. h. ein Verb, das einen Objektsatz regiert, der als Tatsache (Faktum) aufgefaßt wird.)

3.5. Enthymeme

Gültige, aber nicht formal gültige Argumente könnte man als sog. **Enthymeme** betrachten, d. h. als Schlüsse, in denen eine (offensichtliche) Prämisse fehlt. In mehreren der Beispiele könnte man eine solche fehlende Prämisse leicht ergänzen. Das Argument

Die Fenster der Marienkirche sind rot.
Alles, was rot ist, ist farbig.

Die Fenster der Marienkirche sind farbig.

hat die Argumentform

Die F sind r.
Alles, was r ist, ist f.

Die F sind f.

Ein zweites Beispiel: Das Argument

Platon war ein Junggeselle.
Wer Junggeselle ist, ist unverheiratet.

Platon war unverheiratet.

hat die Argumentform

P war ein J.
Ein (jeder) J ist U.

P war U.

Nicht immer ist es leicht, eine 'fehlende' Prämisse zu ergänzen; aber man könnte überlegen, ob man nicht immer ein nicht-formal gültiges Argument durch Ergänzen von Prämissen und folgender logischer Analyse als ein formal gültiges Argument auffassen kann. Man erhielte dann vielleicht eine 'Logik von Wissensausdrücken' und eine 'Logik der Farbaussagen'. (Dann wäre es sinnvoll, ein Argument nur dann 'gültig' zu nennen, wenn es eine formal gültige Argumentform hat.)

3.6. Zusammenfassung

Ein **Argument** ist (logisch) **gültig** genau dann wenn es (logisch) unmöglich ist, daß die Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch.

Eine **Argumentform** ist (formal [29]) **gültig** genau dann, wenn jede Interpretation der Platzhalter ein gültiges Argument ergibt.

Ein **Argument** ist **formal gültig** (gültig aufgrund seiner logischen Form) genau dann, wenn es eine **gültige Argumentform** besitzt.

[29] Argumentformen sind nur im formalen Sinn gültig; man kann daher das 'formal' auch weglassen.

4. Aussagenlogik: Wahrheitsfunktionen

4.1. Motivation und Gedankengang
4.2. Wahrheitsfunktionale Aussageverknüpfungen
4.3. Wahrheitstafeln
4.4. Negation
4.5. Konjunktion
4.6. Adjunktion (auch: Disjunktion)
4.7. Subjunktion (auch: materiale Implikation, materiales Konditional)
4.8. Bisubjunktion

4.1. Motivation und Gedankengang

Im folgenden behandeln wir die sog. **Aussagenlogik**. Diese behandelt eine Klasse von Argumenten mit einer bestimmten logischen Form, nämlich solche, die **zusammengesetzte Aussagen** als Prämissen oder als Konklusion enthalten:

Shakespeare wrote *Hamlet*, or Bacon wrote *Hamlet*.
Bacon didn't write *Hamlet*. (It is not the case that Bacon wrote *Hamlet*.)

Shakespeare wrote *Hamlet*.

In diesem Beispiel ist die erste Prämisse eine zusammengesetzte Aussage; damit ist gemeint, daß sie aus anderen Aussagen aufgebaut ist, die auf eine bestimmte Art verknüpft sind:

Shakespeare wrote *Hamlet*, or Bacon wrote *Hamlet*.

ist als ganzes eine Aussage (ein wahrheitsdefiniter Satz); aber in dem Satz kommen zwei weitere Teile vor, die selbst wiederum Aussagen sind: 'Shakespeare wrote *Hamlet*' und 'Bacon wrote *Hamlet*'; beide Aussagen sind durch ein '… or …' verküpft.

Für bestimmte Arten der Verknüpfung – den sogenannten **wahrheitsfunktionalen Aussagenverknüpfungen** – hängt der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage *nur* von den Wahrheitswerten der Teilaussagen ab, nicht aber etwa vom genauen Inhalt – d. h., man kann vom Inhalt der Aussagen abstrahieren und diese durch Platzhalter ersetzen, um so die logische Form eines Arguments zu erhalten; diese wird seine **aussagenlogische Form** (kurz: a.l. Form) genannt.

Die **aussagenlogische Form** enthält als **nicht-logische Konstanten** – den Teil von Argumenten, den man nicht verstehen muß, sondern durch Platzhalter ersetzen kann – die (Teil-)Aussagen; als **logische Konstanten** – den Teil des Arguments, den man verstehen muß – enthält sie vor allem die Arten der wahrheitsfunktionalen Aussagenverknüpfung. Benannt ist die Aussagenlogik nach den nicht-logischen Konstanten, den Aussagen (bisweilen nennt man sie auch 'Junktorenlogik', nach den Verknüpfungen als wichtigster Art der logischen Konstanten).

Ersetzen wir im dem Beispiel die Teilaussagen (als nicht-logische Konstanten) durch die Platzhalter A und B, erhalten wir eine aussagenlogische Argumentform:

A, or B.
It is not the case that B.

A.

Diese **aussagenlogische Argumentform** ist gültig: Gleich, welche Aussage für die Platzhalter eingesetzt wird, gilt: Wenn die Prämissen wahr sind, dann ist auch die Konklusion wahr.

Der erste Schritt besteht im folgenden darin, einige Arten von Aussagenverknüpfungen zu betrachten, die wahrheitsfunktional sind und damit für das Vorhaben in Frage kommen. Der zweite Schritt besteht dann im Aufbau einer formalen aussagenlogischen Sprache, die es ermöglicht, *alle* gültigen aussagenlogischen Argumentformen mit diesen Verknüpfungen zu beschreiben.

4.2. Wahrheitsfunktionale Aussageverknüpfungen

Viele Aussagen haben Bestandteile, die selbst wiederum Aussagen sind; jene nennen wir Hauptaussage, diese Teilaussagen:

Hegel discovered that $\underbrace{E = mc^2}_{\text{Teilaussage}}$. Einstein held that $\underbrace{E = mc^2}_{\text{Teilaussage}}$.

It is not the case that $\underbrace{\text{Caesar killed Brutus}}_{\text{Teilaussage}}$.

$\underbrace{\text{Shakespeare wrote } \textit{Hamlet}}_{\text{Teilaussage}}$, or $\underbrace{\text{Bacon wrote } \textit{King Lear}}_{\text{Teilaussage}}$.

(Das Englische als Objektsprache hat hier die schöne Eigenschaft, daß die Satzstellung in den Teilaussagen anders als im Deutschen nicht invertiert ist.)

Oft, aber nicht immer hängt der Wahrheitswert der Hauptaussage vom Wahrheitswert der Teilaussage(n) ab: Die (Haupt)Aussage, Hegel habe *entdeckt*, daß $E = mc^2$, kann nur wahr sein, wenn die Teilaussage $E = mc^2$ wahr ist (das ist sie; die Hauptaussage ist aber trotzdem falsch); die (Haupt)Aussage, Einstein habe *gemeint*, daß $E = mc^2$,

ist wahr oder falsch unabhängig davon, ob $E = mc^2$ wahr oder falsch ist.[30]

Bei den beiden anderen Beispielen ist die Verbindung zwischen dem Wahrheitswert der Hauptaussage und den Wahrheitswerten der Teilaussagen enger: Der Wahrheitswert der Hauptaussage ist durch die Wahrheitswerte der Teilaussagen eindeutig bestimmt:

It is not the case that Caesar killed Brutus.

ist genau dann wahr (dann und nur dann wahr), wenn die Teilaussage 'Caesar killed Brutus' falsch ist. ('Dann und nur dann wenn' meint: Umgekehrt ist auch die Hauptaussage falsch, wenn 'Caesar killed Brutus' wahr ist.) Die Aussage

Shakespeare wrote *Hamlet*, or Bacon wrote *King Lear*.

wiederum ist genau dann wahr, wenn wenigstens eine ihrer beiden Teilaussagen wahr ist: wenn Shakespeare *Hamlet* oder Bacon *King Lear* verfaßt hat (oder beide).

Ist der Wahrheitswert der Hauptaussage durch die Wahrheitswerte der Teilaussagen eindeutig bestimmt, nennen wir die Hauptaussage eine **zusammengesetzte Aussage** und die Verknüpfung eine **wahrheitsfunktionale Aussagenverknüpfung**.[31] (Von einer 'Verknüpfung' zu sprechen, ist im zweiten Beispiel mit zwei Teilaussagen naheliegender als in ersten mit nur einer; es ist aber nur ein Wort.)

4.3. Wahrheitstafeln

Wie der Wahrheitswert einer wahrheitsfunktional zusammengesetzten Aussage von den Wahrheitswerten der Teilaussagen abhängt, läßt sich übersichtlich in einer **Wahrheitstafel** angeben. In einer Wahrheitstafel stehen links die möglichen Kombinationen der Wahrheitswerte der Teilaussagen; die rechte Spalte enthält den Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage als Funktion von dessen (echten) Teilaussagen. (Diese Darstellung findet sich erstmals in Ludwig Wittgensteins *Logisch-Philosophischer Abhandlung* (1921); vgl. Abb. 1.)

In unserem ersten Beispiel sähe dies so aus:

Caesar killed Brutus	It is not the case that Caesar killed Brutus
wahr	falsch
falsch	wahr

Es ist praktischer, wir kürzen dies ab: 'wahr' = w, 'falsch' = f und 'Caesar killed

[30] Die Verben 'to know', 'to Discover' usw. sind (wie gesagt) sog. faktive Verben, die einen Objektsatz regieren, der als Tatsache (Faktum) vorausgesetzt wird; in der Sprachphilosophie und Lingustik faßt man dies oft unter den Begriff der 'Präsuppositionen', d. h. die Wahrheit der Objektsätze ist eine Voraussetzungen für die Sinnhaftigkeit der Hauptaussage.

[31] Man spricht bei wahrheitsfunktionalen Aussageverknüpfungen auch von 'extensionalen Aussageverknüpfungen' im Gegensatz zu 'intensionalen Aussageverknüpfungen'.

Brutus' = A:

A	It is not the case that A
w	f
f	w

Das zweite Beispiel sähe, mit den selben Abkürzungen für 'wahr', 'falsch' sowie 'Shakespeare wrote *Hamlet*' = A, 'Bacon wrote *Hamlet*' = B so aus:

A	B	A, or B
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Kennt man die Wahrheitswerte der Teilaussage(n), kann man den Wahrheitswert der wahrheitsfunktional gebildeten zusammengesetzten Aussage rechts in der entsprechenden Zeile ablesen. (Das Umgekehrte gilt nicht immer; gelesen werden Wahrheitstafeln von links nach rechts.)

Da es nur auf den Wahrheitswert der Teilaussagen, nicht aber auf deren Inhalt ankommt, können wir statt der Abkürzungen auch gleich Platzhalter für beliebige Aussagen verwenden und die rechte Spalte als logische Form der zusammengesetzten Aussage auffassen.

4.4. Nochmal: wahrheitsfunktionale Aussageverknüpfungen

Im folgenden betrachten wir einige wichtige wahrheitsfunktionale Aussagenverknüpfungen, sogenannte **Junktoren**: die Negation ('Es ist nicht der Fall, daß …'), die Konjunktion ('… und …'), die Adjunktion ('… oder …'), die Subjunktion ('nicht … oder …') sowie die Bisubjunktion ('… genau dann wenn …').

Wir gehen dabei von in natürlichen Sprachen (Deutsch bzw. Englisch) formulierten Aussagen aus, und geben in jedem Fall eine Aussageform zu den Aussagen an; dabei werden wir aber für die Ausdrücke, die wir als Junktoren interpretieren, jeweils Kunstzeichen einführen, z. B. '… ∧ …' für '… und …'. Der Grund dafür ist, daß die Ausdrücke in den natürlichen Sprachen selten eine genaue Entsprechung der logischen Junktoren sind – diese lassen sich auch anders als wahrheitsfunktional interpretieren. Wir deuten die Schwierigkeiten hier aber nur an und kommen auf die Frage der 'Übersetzung' später zurück.

Diese Uneindeutigkeit gilt v. a. für die Aussagen jeweils für sich. Treten die Aussagen *als Prämissen oder Konklusion von Argumenten* auf, legt dies oft eine wahrheitsfunktionale Interpretation nahe: Oft läßt sich nur unter der Annahme, daß wahrheitsfunk-

tionale Aussageverknüpfungen gemeint sind, ein Argument als gültig interpretieren.

4.5. Negation

Eine einfache Wahrheitsfunktion einer Aussage ist deren (logische) Verneinung oder (logische) **Negation**: **Eine verneinte (negierte) Aussage ist genau dann wahr, wenn die Aussage falsch ist.** Für die Negation einer beliebigen Aussage 'A'[32] schreiben wir '$\neg A$', und definieren sie durch die folgende Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Man liest den Ausdruck '$\neg A$' als '**Es ist nicht der Fall, daß *A***' oder kürzer 'nicht A' (aber nicht jedes 'nicht …' drückt die logische Negation aus – finden Sie Beispiele). (Die Negation wird wie gesagt nur bequemlichkeitshalber als 'Aussage*verknüpfung*' bezeichnet.)

4.6. Konjunktion

Eine aus (genau) zwei Teilaussagen zusammengesetzte Aussage ist genau dann eine **Konjunktion, wenn sie genau dann wahr ist, wenn beide Teilaussagen wahr sind**.

Für die Konjunktion von zwei Aussagen 'A' und 'B' schreiben wir '$A \wedge B$', und definieren sie durch die folgende Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Man liest den Ausdruck '$A \wedge B$' als '***A* und *B***'. Dies klingt auf den ersten Blick unproblematisch, ist aber selten wirklich passend – die Verwendung von 'und' im Deutschen ist viel komplizierter und selten wahrheitsfunktional. Wir machen nur einige erste Anmerkungen:

Die logische Konjunktion *zwischen Aussagen* wird im Deutschen oft gar nicht (durch

[32] Hier ist eine beliebige Aussage gemeint – daher das kursive A als Platzhalter für irgendeine Aussage.

ein Wort) ausgedrückt, sondern die Aussagen (Aussagesätze) werden einfach aneinandergereiht:

> Im Allgemeinen werden die Bewohner Göttingens eingeteilt in Studenten, Professoren, Philister und Vieh [...]. Der Viehstand ist der bedeutendste.[33]

Ein 'und' steht (wie im Beispiel) oft nicht zwischen Aussagen, sondern Satzteilen (zumal in Aufzählungen) – daraus lassen sich dann oft Satz-Reihen, durch 'und' verbunden, formen:

> Ich kam, sah, und siegte. veni vidi vici

beispielsweise ließe sich umformen in

> Ich kam und ich sah und ich siegte.

Aber wenn Aussagen (Aussagesätze) durch 'und' verbunden sind, deutet dies oft eine intensionale (etwa zeitliche oder kausale) Verbindung zwischen den Aussagen an (also gerade keine Konjunktion): Dies kann man oft durch die Umstellprobe herausfinden; denn wenn die 'und' in dem umgeformten Satz logische Konjunktionen wären, müßte die folgende Satzreihe die selbe (zusammengesetzte) Aussage ausdrücken:

> Ich siegte, und ich kam, und ich sah.

Hier zeigt sich, daß die Reihenfolge wichtig ist; dies kann sie aber bei einer Konjunktion (definitionsgemäß) nicht sein: eine Konjunktion ist genau dann wahr, wenn ihre Teilaussagen wahr sind – unabhängig von deren Reihenfolge.

4.7. Adjunktion (auch: Disjunktion)

Eine aus (genau) zwei Teilaussagen zusammengesetzte Aussage ist genau dann eine **Adjunktion, wenn sie genau dann wahr ist, wenn eine (oder beide) Teilaussagen wahr sind**.

Für die Adjunktion von zwei Aussagen 'A' und 'B' schreiben wir '$A \vee B$', und definieren sie durch die folgende Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Man liest den Ausdruck '$A \vee B$' als '***A* oder *B***'. Es gibt aber zwei Bedeutungen von 'oder', neben diesem sogenannten 'einschließenden Oder' (lateinisch 'vel'; daher

[33] Heinrich Heine, *Die Harzreise*, Stuttgart 2003, S. 6.

auch das Symbol '$\vee$') und das sogenannte 'ausschließende Oder' (lateinisch 'aut … aut …'); bei diesem ist die zusammengesetzte Aussage genau dann wahr ist, wenn genau eine (nicht aber beide) Teilaussagen wahr sind. Zur Unterscheidung ließt man das ausschließende Oder, wenn es darauf ankommt, meist als 'entweder … oder …':

Entweder Sie zahlen ihre Steuern, oder Sie werden angezeigt.

(Es wäre nicht nett, jemanden später dann doch anzuzeigen, obwohl er seine Steuern bezahlt hat.)

4.8. Subjunktion (auch: materiale Implikation, materiales Konditional)

Eine aus (genau) zwei Teilaussagen A und B zusammengesetzte Aussage ist genau dann eine **Subjunktion (materiale Implikation, materiales Konditional), wenn sie genau dann wahr ist, wenn *A* falsch oder *B* wahr ist**.

Für die Subjunktion von zwei Aussagen 'A' und 'B' schreiben wir '$A \supset B$' (oft schreibt man auch '$A \rightarrow B$'), und definieren sie durch die folgende Wahrheitstafel:

A	B	$A \supset B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Man liest den Ausdruck '$A \supset B$' als '**nicht *A* oder *B***'. 'A' bezeichnet man als **Antezedens**, 'B' als **Konsequens** der Subjunktion. (Das Zeichen heißt 'Hufeisen' oder engl. 'horseshoe'.)

Oft liest man '$A \supset B$' auch als '**wenn *A*, dann *B***' – aber die Verwendung von 'wenn … dann …' entspricht meist nicht derjenigen der Definition der Subjunktion in der Wahrheitstafel, denn nach dieser sind die folgenden Aussagen (Subjunktionen) wahr:

Wenn Shakespeare *Hamlet* geschrieben hat, war Bacon ein großer Schriftsteller.

Wenn Shakespeare die *Ilias* geschrieben hat, war Shakespeare ein lausiger Schriftsteller.

Interpretieren wir die 'wenn … dann …' als Subjunktion, ist die erste Aussage wahr, *weil/insofern das Konsequens wahr* ist (was seltsam ist, da zwischen den Teilaussagen kein erkennbarer Zusammenhang besteht, wie ihn 'wenn … dann …' andeutet); die zweite Aussage wäre ebenfalls wahr, einfach *weil/insofern das Antezendens falsch* ist (ebenfalls seltsam – zumal wenn man die *Ilias* für große Literatur hält und hier ein Zusammenhang besteht).

(Bei Konditionalsätzen sollte man daher Wenn-Sätze nicht als 'Antezedens', sondern

linguistisch als ‘Protasis’ bezeichnen, und Dann-Sätze nicht als ‘Konsequens’, sondern als ‘Apodosis’; oder schlichter als ‘Wenn-’ und ‘Dann-Satz’.)

4.9. Bisubjunktion

Eine aus (genau) zwei Teilaussagen zusammengesetzte Aussage ist genau dann eine **Bisubjunktion (materiale Äquivalenz [34]), wenn beide Aussagen wahr oder beide falsch sind**.

Für die Bisubjunktion von zwei Aussagen ‘A’ und ‘B’ schreiben wir ‘$A \equiv B$’ (oft schreibt man auch ‘$A \leftrightarrow B$’), und definieren sie durch die folgende Wahrheitstafel:

A	B	$A \equiv B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Man liest den Ausdruck ‘$A \equiv B$’ als ‘***A* dann, und nur dann, wenn *B***’ bzw. als ‘***A* genau dann wenn *B***’ (‘***A* gdw. *B***’). (Englisch: ‘… if, and only if …’, oft abgekürzt ‘**iff**’. (Wiederum legt das ‘wenn’ der Lesart einen gewissen Zusammenhang nahe, der nach der Definition der Bisubjunktion nicht bestehen muß.)

[34] Die Bezeichnung ‘materiale Äquivalenz’, oft auch kurz ‘Äquivalenz’ (z. B. Kutschera, S. 32), vermeiden wir hier wegen Verwechselungsgefahr mit der ‘(aussagen)logischen Äquivalenz’ (Kap. 8).

4.43 Die Übereinstimmung mit den Wahrheitsmöglichkeiten können wir dadurch ausdrücken, indem wir ihnen im Schema etwa das Abzeichen »W« (wahr) zuordnen.
Das Fehlen dieses Abzeichens bedeutet die Nichtübereinstimmung.

4.431 Der Ausdruck der Übereinstimmung und Nichtübereinstimmung mit den Wahrheitsmöglichkeiten der Elementarsätze drückt die Wahrheitsbedingungen des Satzes aus.
Der Satz ist der Ausdruck seiner Wahrheitsbedingungen. (Frege hat sie daher ganz richtig als Erklärung der Zeichen seiner Begriffsschrift vorausgeschickt. Nur ist die Erklärung des Wahrheitsbegriffes bei Frege falsch: Wären »das Wahre« und »das Falsche« wirklich Gegenstände und die Argumente in ~p etc., dann wäre nach Freges Bestimmung der Sinn von »~p« keineswegs bestimmt.)

4.44 Das Zeichen, welches durch die Zuordnung jener Abzeichen »W« und der Wahrheitsmöglichkeiten entsteht, ist ein Satzzeichen.

4.441 Es ist klar, daß dem Komplex der Zeichen »F« und »W« kein Gegenstand (oder Komplex von Gegenständen) entspricht; so wenig wie den horizontalen und vertikalen Strichen oder den Klammern. — »Logische Gegenstände« gibt es nicht.
Analoges gilt natürlich für alle Zeichen, die dasselbe ausdrücken wie die Schemata der »W« und »F«.

4.442 Es ist z. B.:

»

p	q	
W	W	W
F	W	W
W	F	
F	F	W

«

ein Satzzeichen.
(Frege's »Urteilstrich« »⊢« ist logisch ganz bedeutungs-

Abb. 1. Eine der ersten Wahrheitstafeln, in: Ludwig Wittgenstein, *Logisch-Philosophische Abhandlung* (1921), in: id., *Schriften*, Bd. 1, Frankfurt 1960, S. 40.

5. Die Syntax der Aussagenlogik

5.1. Rekursion
5.2. Das Alphabet der Aussagenlogik
5.3. Sätze
5.4. Klammer-Konventionen
5.5. Alternative Bezeichnungen und Schreibweisen

5.1. Rekursion

Im letzten Kapitel haben wir eine Reihe von wahrheitsfunktionalen Aussageverknüpfungen betrachtet. In diesem werden wir eine **formale Sprache**, die **Sprache der Aussagenlogik (AL)** einführen, mit einem Alphabet (den Zeichen von AL) und einer Syntax (Regeln für die Zusammensetzung der Zeichen zu zusammengesetzten 'Sätzen'); das folgende Kapitel behandelt die Semantik (Regeln für für Interpretation und Bewertung der Sätze der AL).

Die Pointe ist zunächst, daß die Sprache **rekursiv** gebildet wird. Die Idee ist einfach: Aus Aussagen lassen sich (s. Kap. 4) durch Aussageverknüpfungen zusammengesetzte Aussagen bilden; da auch zusammengesetzte Aussagen Aussagen sind, lassen auch diese sich wieder verknüpfen, zu komplizierteren Aussagen usw.

Betrachten wir die Aussagen 'Es schneit' (A), 'Es regnet' (B), 'Es stürmt' (C) und 'Es hagelt' (D) (Weihnachten 2015 in Bielefeld). Mit den besprochenen Aussageverknüpfungen läßt sich aus diesen Aussagen z. B. die zusammengesetzte Aussage 'Es schneit und es regnet' bilden ($A \wedge B$), und auch die zusammengesetzte Aussage 'Es hagelt nicht' ($\neg D$), und aus dieser wiederum: 'Es hagelt nicht gdw. es schneit' ($\neg D \equiv C$).

Aus diesen zusammengesetzten Aussagen lassen sich aber wiederum kompliziertere Aussagen bilden, z. B. 'Es schneit und es regnet; oder: es hagelt nicht gdw. es schneit' ($(A \wedge B) \vee (\neg D \equiv A)$). (Die Klammern zeigen die Reihenfolge der Zusammensetzung.) Und daraus: 'Wenn es schneit und es regnet, oder: wenn es nicht hagelt gdw. es schneit; – dann stürmt es nicht':

$$\big((A \wedge B) \vee (\neg D \equiv A)\big) \supset \neg C\big).$$

Und so lassen sich beliebig viele weitere, kompliziertere Aussagen bilden. – Da die

Aussageverknüpfungen wahrheitsfunktional sind, hängt der Wahrheitswert beliebig komplizierter Aussagen aber allein von dem der vier Aussagen A, B, C und D ab, und läßt sich leicht bestimmen, wenn diese bekannt sind.

5.2. Das Alphabet der Aussagenlogik

In der **Syntax** werden die Ausdrücke einer Sprache und deren Zusammensetzungen (gr. συντάττω: zusammensetzen, in Reih und Glied aufstellen) untersucht, und zwar unabhängig von deren Sinn und Bedeutung, Textfunktion und Redeabsichten, Interpretationen usw. Im Fall der Aussagenlogik, einer formalen Sprache, sind nur die Zeichen und Ausdrücke und die Regeln von deren Zusammenstellung wichtig.

Alphabet von AL. Die (Objekt)Sprache AL hat folgende Zeichen:

1. unendlich viele **(Elementar)Sätze** a, b, c, …, a_0, a_1, usw.;

2. die **Junktoren** $\neg$ (Negation), $\wedge$ (Konjunktion), $\vee$ (Adjunktion), $\supset$ (Subjunktion) und $\equiv$ (Bisubjunktion);

3. die (paarweise auftretenden) **Hilfszeichen**: (und).

Bemerkung zum Sprachgebrauch: Statt 'Elementarsätze' sagt man oft auch: Elementaraussagen, atomare Aussagen, atomare Sätze, Aussagenvariablen, Boolesche Variablen, Boolesche Konstanten, Boolesche Parameter uam. (engl.: propositional variables, propositional parameters etc.).

5.3. Sätze

Nicht alle Kombinationen dieser Zeichen sind 'wohlgeformte Ausdrücke'[35] in der Sprache der AL (nicht jede aus dem deutschen Alphabet gebildete Buchstabenreihe ist ein deutsches Wort; nicht jede Reihe deutscher Wörter ein korrekter Satz); solche, die es sind, bezeichnen wir als **Sätze**.

Sätze von AL. Die wohlgeformten Ausdrücke oder Sätze der (Objekt)Sprache AL sind folgendermaßen gebildet:

1. Jeder Elementarsatz von AL ist ein Satz;

2. sind A und B Sätze, dann sind auch $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ und $(A \equiv B)$ Sätze;[36]

3. weitere Sätze gibt es nicht.

[35] Ein 'wohlgeformter Ausdruck' einer Sprache ist ein syntaktisch korrekt gebildeter; hier bedeutet dies v. a., der Ausdruck soll eindeutig sein bei einer gewählten Interpretation oder Bewertung (s. 5.5).
[36] Vgl. Beckermann, S. 57 Anm., zu den Feinheiten dieser Definition.

Dies ist eine sogenannte **rekursive Definition**: sie zeigt, wie aus Sätzen andere Sätze gebildet werden (können) – daher auch die Verwendung der (metasprachlichen) Satz-Variablen A und B (anstelle der objektsprachlichen Satz-Parameter p und q usw.): nicht nur aus Elementarsätzen, sondern auch aus zusammengesetzten Sätzen können nach den Regeln weitere Sätze gebildet werden.

Der sog. **Skopus** (**Wirkungsbereich**) eines Junktors umfaßt die beiden Sätze, die er verbindet (im Fall der Negation: den Satz, vor dem er steht). In jedem wohlgeformten Satz gibt es ein **Hauptzeichen** (main connective): der Junktor, dessen Skopus den ganzen Satz umfaßt. Zusammengesetzte Sätze werden nach ihrem Hauptzeichen benannt (z. B. nennt man '$(A \wedge B)$' eine Konjunktion).

5.4. Klammer-Konventionen

Klammern dürfen weggelassen oder ergänzt werden, solange die Eindeutigkeit erhalten bleibt. Insbesondere

1. dürfen die Außenklammern[37] weggelassen werden, z. B. schreibt man

$(a \wedge (b \wedge c)) \supset p$ anstelle von $((a \wedge (b \wedge c)) \supset p)$.

Wenn man plant, aus einem Satz rekursiv einen anderen zu bilden, sollte man die Klammern lieber nicht weglassen bzw. ggf. wieder hinzufügen;

2. dürfen Klammern um stärker bindende Junktoren weggelassen werden; $(A \wedge B)$ und $(A \vee B)$ binden stärker als $(A \supset B)$ und $(A \equiv B)$, z. B. schreibt man

$a \wedge b \supset c$ anstelle von $(a \wedge b) \supset c$;

3. bei Reihen von Konjunktionen, Adjunktionen und Bisubjunktionen können die Klammern weggelassen werden; z. B.

$a \wedge b \wedge c \wedge d \supset e$ anstelle von $(a \wedge (b \wedge (c \wedge d))) \supset e$.

4. Anstelle der Klammern (und) können auch die eckigen Klammern [und] verwendet werden; z.B:

$\big(a \wedge [b \wedge (c \wedge d)]\big) \supset e$ anstelle von $(a \wedge (b \wedge (c \wedge d))) \supset e$.

Daß Regel 3 nicht zu Problemen (Uneindeutigkeiten) führt, müßte eigentlich erst gezeigt werden. Die Regeln 1, 2 und 4 sind dienen einzig der besseren Lesbarkeit.

Beispiele. Wohlgeformte Ausdrücke der AL sind:

$$(a \supset \neg b), \qquad \big(((h \wedge (\neg(t \supset g) \vee b)) \equiv ((a \wedge t) \supset (t \vee \neg t))\big) \supset \big(a \supset \neg b\big).$$

[37] Nicht die 'äußersten' Klammern; sonst könnte man $(a \wedge b \wedge (c \wedge (d \supset e)))$ vereinfachen zu $a \wedge b \wedge (c \wedge (d \supset e))$, dies wiederum zu $a \wedge b \wedge c \wedge (d \supset e)$ usw.

(Aufgabe: Welches ist das Hauptzeichen der Sätze?)

Nicht-wohlgeformte Ausdrücke der AL sind:

$(p \wedge q \vee r)$, $\neg(p)$, $(p) \equiv x$, $((a))$, $()a \supset \wedge bc$.

(Aufgabe: Versuchen Sie, aus den Zeichen dieser nicht-wohlgeformten Ausdrücke Sätze der AL zu bilden.)

5.5. Alternative Bezeichnungen und Schreibweisen

Es gibt eine Reihe alternativer gebräuchlicher Bezeichnungen und Schreibweisen für die Junktoren:

Negation: '$\neg p$', '$\sim p$', (in der Mathematik) auch: '$\bar{p}$'; 'p'', 'Np';

Konjunktion: '$a \wedge b$', '$a \cdot b$', '$a \,\&\, b$', '$a\, b$'; auch: '$A \cap B$', 'Kab';

Adjunktion: '$a \vee b$'; auch: '$a + b$', '$a \cup b$', 'Aab'; alternative Bezeichnung: 'Disjunktion';

Subjunktion: '$a \supset b$', '$a \rightarrow b$'; auch: '$a : b$', 'Cab'; alternative Bezeichnungen: 'materiale Implikation'oder 'materiales Konditional';

Bisubjunktion: '$a \equiv b$', '$a \leftrightarrow b$', auch: '$a = b$', '$a \sim b$', '$a \sqcap b$', 'Eab'; alternative Bezeichnung: 'Bikonditional'.

Anstelle von **Klammern** findet man zumal in älteren Texten auch die auf Guiseppe Peanos *Formulario Mathematico* zurückgehende Punktschreibweise: [38] bei dieser treten Punkte zu den Junktoren, die später hinzugefügt werden. In dieser sog. Peano-Russell-Notation steht z. B.

$a \supset .b \supset c$

anstelle von

$(a \supset (b \supset c))$.

[38] Viele Symbole der Logik und Mathematik gehen auf Peano zurück, unter anderem die Schreibweisen für geordnete Paare '(a, b)', das Elementsymbol '$\in$' und der Existenzquantor '$\exists$'.

6. Semantik der Aussagenlogik

6.1. Interpretationen und Bewertungen
6.2. Bewertung zusammengesetzter Sätze
6.3. Wahrheitswertanalyse

6.1. Interpretationen und Bewertungen

Wir unterscheiden (intensionale) **Interpretationen** und **Bewertungen** (extensionale Interpretationen) der Elementarsätze der AL.

Eine **(intensionale) Interpretation** legt Elementarsätzen einen Sinn bei; formaler: es ist eine Funktion $\mathcal{J}(\ )$, die Elementarsätzen (einigen oder allen) eine Satzbedeutung zuordnet (praktisch: einen Satz einer natürlichen Sprache); Beispiele:

$\mathcal{J}(p)$ = Es regnet.

$\mathcal{J}(q)$ = Die Stadt Kiel soll – mehrfach – aufgrund des Vorwurfs der Piraterie aus der Hanse ausgeschlossen worden sein.

$\mathcal{J}(r)$ = Es gibt Leporiden.

Auf die Inhalte kommt es hier aber gerade gar nicht an; es genügt, die Wahrheitswerte der Sätze zu kennen, m.a.W.: deren Bewertung.

Eine **Bewertung** oder extensionale Interpretation ordnet den Elementarsätzen einen Wahrheitswert bei; formaler: es ist eine Funktion $|\ \ |$, die allen Elementarsätzen einen der beiden Wahrheitswerte 'wahr' und 'falsch' zuordnet; Beispiele:

$|\, p \,|$ = falsch,

$|\, q \,|$ = wahr,

$|\, r \,|$ = wahr,

...

Für unsere Zwecke genügen Bewertungen von Teilmengen der Elementarsätze. Für die **Wahrheitswerte** 'wahr' und 'falsch' schreiben wir wiederum kurz 'w' bzw. 'f'. (Andere Schreibweisen: 1 und 0, `T` und `F` usw.)

6.2. Bewertung zusammengesetzter Sätze

Sätze, die keine Elementarsätze sind, nennen wir zusammengesetzte Sätze (analog zu 'zusammengesetzten Aussagen'). Die Bewertung zusammengesetzter Sätze läßt sich dann (wiederum rekursiv) definieren als Funktion der Bewertung von deren (echten [39]) Teilsätzen A und B:

$| \neg A | =_{\text{def}}$ wahr gdw. $| A | =$ falsch,

$| A \wedge B | =_{\text{def}}$ wahr gdw. $| A | = | B | =$ wahr,

$| A \vee B | =_{\text{def}}$ falsch gdw. $| A | = | B | =$ falsch,

$| A \supset B | =_{\text{def}}$ falsch gdw. $| A | =$ wahr und $| B | =$ falsch,

$| A \equiv B | =_{\text{def}}$ wahr gdw. $| A | = | B |$.

Hier stehen wiederum die Großbuchstaben A, B als Satz-Platzhalter für entweder für Elementarsätze (p, q usw.) oder rekursiv gewonnen andere Sätze (z. B. $\big(a \wedge [b \wedge (c \wedge d)]\big) \supset e$).[40]

Dies ist eigentlich dasselbe, was oben durch Wahrheitstafeln ausgedrückt wurde; man könnte auch Wahrheitstafeln für die Definition nutzen.[41]

6.3. Wahrheitswertanalyse

Da zusammengesetzte Sätze rekursiv aus anderen Sätzen gebildet werden (s. 5.3), und die Bewertung zusammengesetzter Sätze nur von der Bewertung ihrer echten Teilsätze abhängt (s. 5.6), kann man die Bewertung eines beliebigen komplexen Satzes schrittweise aus der Bewertung der (echten) Teilsätze bestimmten; dieses Verfahren nennt sich Wahrheitswertanaylse.

Beispiel. Betrachten wir einen einfachen Satz mit nur einem Elementarsatz:

$p \equiv \neg\neg p.$ duplex negatio affirmat

Wenn eine bestimmte Bewertung der Teilsätze gegeben ist, läßt sich aus dieser schrittweise die Bewertungen von komplexeren Teilsätzen bis zur Bewertung des Hauptzeichens ermitteln. Ist z. B. $| p | =$ falsch, folgt:

[39] Echte Teilsätze sind solche, die die Form $\neg A$ haben oder die Form (A), wenn man die Klammer-Konventionen ignoriert. Mit anderen Worten: Es sind diejenigen Teile eines Satzes (als wohlgeformter Ausdruck), die allein selbst Sätze bilden (wenn keine Klammern weggelassen sind).

[40] Würde man hier Kleinbuchstaben verwenden, wären die Definitionen strenggenommen nur auf Elementarsätze anwendbar.

[41] Dies stimmt nicht ganz; vgl. Hoyningen-Huene, S. 55–57.

$$\underbrace{\underbrace{p}_{\text{f}} \equiv \underbrace{\neg \underbrace{\neg \underbrace{p}_{\text{f}}}_{\text{w}}}_{\text{f}}}_{\mathbf{w}}$$

Man kann dies auch in eine Zeile schreiben, indem man die Bewertungen nacheinander direkt unter die Operatoren schreibt, in der Reihenfolge der Auswertung der Junktoren:

p	$\equiv$	$\neg$	$\neg$	p
f	**w**	f	w	f

Beispiel. Betrachten wir einen komplexeren Satz mit drei Elementarsätzen und weiteren Junktoren:

$$\big((p \supset q) \supset r\big) \equiv \big(p \supset (q \supset r)\big).$$

Wiederum kann man für eine bestimmte Bewertung der Elementarsätze (hier: $|\, p \,| = |\, r \,| =$ wahr, $|\, q \,| =$ falsch) die Bewertung der Teilsätze der Reihe nach bis zum Hauptzeichen (Hauptjunktor) bestimmen:

$$\underbrace{\underbrace{\big(\underbrace{(\underbrace{p}_{\text{w}} \supset \underbrace{q}_{\text{f}})}_{\text{f}} \supset \underbrace{r}_{\text{w}}\big)}_{\text{w}} \equiv \underbrace{\big(\underbrace{p}_{\text{w}} \supset \underbrace{(\underbrace{q}_{\text{f}} \supset \underbrace{r}_{\text{w}})}_{\text{w}}\big)}_{\text{w}}}_{\mathbf{w}}$$

Wiederum ließe sich dies kürzer in einer Zeile unter die Junktoren schreiben:

$\big(($	p	$\supset$	q	$) \supset$	$r\big)$	$\equiv$	$\big(p \supset ($	q	$\supset$	r	$)\big)$
w	f	f		w w	**w**	w w		f	w	w	

Wir haben jetzt eine Sprache (AL), und können Sätze der Sprache bewerten und v. a. Bewertungen wahrheitsfunktional zusammengesetzter Sätze auf die Bewertungen ihrer echten Teilsätze zurückführen. Dies alles betrifft die Aussagen der Objektsprache. Die Logik war aber bestimmungsgemäß die Lehre von der logischen Folgerung, also der logischen Zusammenhänge zwischen Aussagen. Der Logik der Aussagenlogik werden wir uns nun zuwenden.

7. Semantische Eigenschaften von Sätzen

7.1. Motivation und Gedankengang
7.2. Aussagenlogische Allgemeingültigkeit
7.3. Bestimmung der Allgemeingültigkeit durch Wahrheitstafeln
7.4. Wahrheitstafeln als Entscheidungsverfahren
7.5. Das Ersetzungstheorem (Substitutionstheorem)
7.6. Wichtige Tautologien
7.7. Aussagenlogische Ungültigkeit
7.8. Aussagenlogische Erfüllbarkeit und Kontingenz

7.1. Motivation und Gedankengang

Die Sprache der AL erlaubt es uns, unendlich viele aussagenlogisch zusammengesetzte Sätze (logische Formen von Aussagen) aufzuschreiben und bei einer gegebenen Bewertung ihren Wahrheitswert zu bestimmen. (Was noch nicht gezeigt ist, ist, ob sich *jeder* wahrheitsfunktional zusammengesetzte Satz mit dem Alphabet und der Syntax der AL wirklich bilden läßt; dies ist der Fall, aber wir stellen diese Frage zunächst zurück.)

Man könnte nun direkt dazu fortschreiten, die Beziehung der logischen Folgerung zwischen Sätzen der AL zu betrachten; wir stellen dies bis zum nächsten Kapitel ebenfalls zurück und untersuchen zunächst, was sich über die Sätze der AL sagen läßt.

Aussagenlogische *Aussagen* sind wahr oder falsch:

If Bacon wrote *Hamlet*, then Bacon was a great writer.

Aussagenlogische *Sätze* kann man als solche nicht wahr oder falsch nennen; es sind ja nur Aussageformen oder -schemata, die durch Interpretation zu Aussagen werden oder durch Bewertung einen Wahrheitswert erhalten:

$A \supset B$.

Die meisten Sätze sind 'unter einer Bewertung' (wie man sagt) mal wahr, mal falsch, je nach Bewertung (eben je nachdem, wie man die nicht-logischen Konstanten / Satzbuchstaben / Platzhalter für Elementarsätze bewertet).

Einige Sätze der AL aber haben die bemerkenswerte Eigenschaft, daß der Wahrheitswert einer Aussage ihrer Form *unabhängig von der Bewertung* ist. Vor allem zwei Fälle sind interessant:

1. bestimmte Sätze sind *unter jeder Bewertung wahr*; diese nennt man *allgemeingültig* oder *tautologisch*;

2. bestimmte Sätze sind *unter jeder Bewertung falsch*; diese nennt man *widersprüchlich* oder *inkonsistent*.

Allgemeingültigkeit und Widersprüchlichkeit nennt man **semantische Eigenschaften von Sätzen**. Wir werden v. a. die Allgemeingültigkeit ausführlicher untersuchen, da sie die Grundlage für ein wichtiges Theorem (das sog. Substitutionstheorem) ist.

Die Sätze der AL, die nicht allgemeingültig bzw. widersprüchlich sind, nennt man '*nicht allgemeingültig*' bzw. '*nicht widersprüchlich*' oder '*konsistent*'. Auch dies sind semantische Eigenschaften von Sätzen.

In einem abgeleiteten Sinn nennt man auch *Aussagen* 'allgemeingültig' bzw. 'widersprüchlich', nämlich dann, wenn sie eine allgemeingültige bzw. widersprüchliche aussagenlogische Form haben.

7.2. Aussagenlogische Allgemeingültigkeit

Definition. Ein Satz A der AL heißt **aussagenlogisch allgemeingültig** (eine Tautologie, auch: aussagenlogisch wahr; engl. **valid**) genau dann, wenn er unter jeder Bewertung wahr ist. Man schreibt: $\models A$.[42]

Das Zeichen '$\models$' hat keinen Namen; wir nennen es 'Gültigkeitszeichen' [43] oder – nach der englischen Bezeichnung '**turnstile**' [44]).

Welche Art von Sätzen sind allgemeingültig? Ein Beispiel kennen Sie schon, und zwar das Tertium non datur:

[42] Anmerkung: Es gibt zwei Lesarten des Zeichens '$\models$':
1. Eigentlich: $\models$ steht für '… daraus folgt logisch …' (entails). Dann ist aber die Schreibweise nicht sauber – man müßte Anführungszeichen, Mengenklammern und Vereinigungsoperatoren nutzen:
$\Gamma \cup \{\text{`}A \supset B\text{'}\} \models \text{`}A\text{'}$,
denn links steht eine Menge von Prämissen (Sätzen), rechts eine Konklusion (Satz).
2. Einfacher: $\models$ steht für 'folglich' (thus). Dann ist die Schreibweise natürlich, nur müßte die Aussage eigentlich lauten:
'$\Gamma, A \supset B \models A$' ist allgemeingültig (unter jeder Bewertung wahr).
Wir schreiben das zweite und meinen das erste – Probleme macht dies nicht (vgl. hierzu Bostock, S. 3–13).

[43] Den Ausdruck 'Gültigkeitszeichen' verwendet z. B. Oberschelp (S. 47); durchgesetzt hat dieser Sprachgebrauch sich aber nicht.

[44] Der Ausdruck 'turnstile' stammt daher, daß Drehsperren (Vereinzelungsanlagen, etwa in U-Bahnen), von oben gesehen, ähnlich aussehen; bisweilen findet man auch die Bezeichnungen 'turnstile' für '$\vdash$' und 'double turnstile' für '$\models$'.

$\models A \vee \neg A$.

Das Tertium non datur ist eine **Metaaussage**; es ist eine Anforderung an Aussagen, die, wie wir gesagt haben, aus dem Zweiwertigkeitsprinzip folgt. Nicht der Satz '$A \vee \neg A$' ist also das Tertium non datur, sondern die Behauptung, jede Aussage dieser Form sei wahr: '$\models A \vee \neg A$'. In der Tat können wir dies zeigen (versuchen Sie es; die Methode wird gleich geschildert). Da der Satz allgemeingültig ist, sagt er uns nichts, was wir nicht schon wüßten. Diese Eigenschaft teilt er mit allen Tautologien: Sie besagen im eigentlichen Sinne nichts – denn was immer man für die Satzbuchstaben (hier: A) einsetzt, man erhält eine wahre Aussage:

Bacon wrote *Hamlet*, or he didn't (or it is not the case that Bacon wrote *Hamlet*).

Wer diese Aussage liest, erfährt nichts über Bacon, den *Hamlet*, oder irgendetwas sonst. Er oder sie kann beurteilen, ob diese Aussage wahr ist, ohne den *Hamlet* oder Francis Bacon kennen zu müssen; man muß nicht einmal wissen, wer oder was die beiden sind. Verstehen muß man allein die logische Form der Aussage, also die aussagenlogische Form des Satzes. – Dies ist schon seltsam; man könnte sich z. B. fragen, ob diese Aussage tatsächlich (wenn dies der Fall ist) überhaupt etwas über den *Hamlet* oder Francis Bacon *aussagt* oder behauptet? Sie tut es nicht; sie handelt von Bacon und *Hamlet*, aber *behauptet nichts* über diese. (Dies ist auch der Grund, warum wir lieber von 'Allgemeingültigkeit' als von 'aussagenlogischer Wahrheit' sprechen – von etwas sinnvoll auszusagen, es sei wahr, legt wenigstens nahe, es könne auch falsch sein, und Tautologien – allgemeingültige Sätze – können dies nicht.)

Im abgeleiteten Sinne nennt man auch *Aussagen* allgemeingültig:

Definition. Eine **allgemeingültige Aussage** ist eine Aussage, die eine allgemeingültige logische Form hat; man sagt auch, die Aussage sei 'wahr aufgrund ihrer logischen Form'.

7.3. Bestimmung der Allgemeingültigkeit durch Wahrheitstafeln

Wahrheitstafeln haben zunächst dazu gedient, die Junktoren zu definieren (oder, deren Definition anschaulich darzustellen). Wir haben sie aber auch genutzt, um die Bewertung komplexer Sätze aus den Bewertungen von deren Teilsätzen zu ermitteln. Macht man dies für alle möglichen Bewertungen der Elementarsätze, läßt sich so bestimmen, ob ein Satz allgemeingültig (unter jeder Interpretation wahr) ist.

Erstes Beispiel: $p \equiv \neg\neg p$

Im ersten Schritt werden die möglichen Bewertungskombinationen links sowie rechts

unter den Elementarsätzen eingetragen (man könnte die Zeile links hier aber auch weglassen):

p	p	$\equiv$	$\neg$	$\neg$	p
w	w				w
f	f				f

Dann werden die Junktoren nacheinander angewandt …

p	p	$\equiv$	$\neg$	$\neg$	p
w	w		w	f	w
f	f		..	w	f

… bis man zum Hauptzeichen (Hauptjunktor) gelangt:

p	p	$\equiv$	$\neg$	$\neg$	p
w	w	**w**	w	f	w
f	f	**w**	f	w	f

Da der Satz hier in allen Zeilen – also unter allen Bewertungen – wahr ist, ist gezeigt, daß die Bisubjunktion $p \equiv \neg\neg p$ allgemeingültig oder aussagenlogisch wahr ist:

$$\models p \equiv \neg\neg p.$$

Ein weiteres Beispiel: $p \supset (q \vee \neg q)$.

Für 2 Elementarsätze sind vier Zeilen erforderlich, um alle möglichen Kombinationen der Bewertungen der Elementarsätze abzudecken:

p	q	p	$\supset$	$(q$	$\vee$	$\neg$	$q)$
w	w	w		w			w
w	f	w		f			f
f	w	f		w			w
f	f	f		f			f

Anwenden der Junktoren …

p	q	p	$\supset$	$(q$	$\vee$	$\neg$	$q)$
w	w	w		w	w	f	w
w	f	w		f	w	w	f
f	w	f		w	..	f	w
f	f	f		f	..	w	f

… bis zum Hauptzeichen:

p	q
w	w
w	f
f	w
f	f

p	$\supset$	$(q$	$\vee$	$\neg$	$q)$
w	**w**	w	w	f	w
w	**w**	f	w	w	f
f	**w**	w	w	f	w
f	**w**	f	w	w	f

Die Subjunktion $p \supset (q \vee \neg q)$ ist somit ebenfalls allgemeingültig:

$\models p \supset (q \vee \neg q)$.

Ein letztes Beispiel: $\big(a \supset (b \supset c)\big) \;\supset\; \big((a \supset b) \supset (a \supset c)\big)$.

Dies ist der sog. Frege'sche Kettenschluß. Die nötige Wahrheitstafel hat 8 Zeilen:

a	b	c	$\big($	a	$\supset$	$(b \supset c)$	$\big)$	$\supset$	$\big($	$(a \supset b)$	$\supset$	$(a \supset c)$	$\big)$
w	w	w		w	w	w				w	w	w	w
w	w	f		w	w	f				w	w	w	f
w	f	w		w	f	w				w	f	w	w
w	f	f		w	f	f				w	f	w	f
f	w	w		f	w	w				f	w	f	w
f	w	f		f	w	f				f	w	f	f
f	f	w		f	f	w				f	f	f	w
f	f	f		f	f	f				f	f	f	f

Zweiter Schritt:

a	b	c	$\big($	a	$\supset$	$(b$	$\supset$	$c)$	$\big)$	$\supset$	$\big($	$(a$	$\supset$	$b)$	$\supset$	$(a$	$\supset$	$c)$	$\big)$
w	w	w		w	w	w	w	w				w	w	w	..	w	w	w	
w	w	f		w	f	w	f	f				w	w	w	..	w	f	f	
w	f	w		w	w	f	w	w				w	f	f	..	w	w	w	
w	f	f		w	w	f	w	f				w	f	f	..	w	f	f	
f	w	w		f	w	w	w	w				f	w	w	..	f	w	w	
f	w	f		f	w	w	f	f				f	w	w	..	f	w	f	
f	f	w		f	w	f	w	w				f	..	f	..	f	w	w	
f	f	f		f	w	f	w	f				f	..	f	..	f	w	f	

Schließlich:

a	b	c	$\big($	a	$\supset$	$(b$	$\supset$	$c)$	$\big)$	$\supset$	$\big($	$(a$	$\supset$	$b)$	$\supset$	$(a$	$\supset$	$c)$	$\big)$
w	w	w		w	w	w	w	w		**w**		w	w	w	w	w	w	w	
w	w	f		w	f	w	f	f		**w**		w	w	w	f	w	f	f	
w	f	w		w	w	f	w	w		**w**		w	f	f	w	w	w	w	
w	f	f		w	w	f	w	f		**w**		w	f	f	w	w	f	f	
f	w	w		f	w	w	w	w		**w**		f	w	w	w	f	w	w	
f	w	f		f	w	w	f	f		**w**		f	w	w	w	f	w	f	
f	f	w		f	w	f	w	w		**w**		f	w	f	w	f	w	w	
f	f	f		f	w	f	w	f		**w**		f	w	f	w	f	w	f	

Auch der Frege'sche Kettenschluß ist also eine Tautologie:

$$\models \big(a \supset (b \supset c)\big) \ \supset \ \big((a \supset b) \supset (a \supset c)\big).$$

7.4. Wahrheitstafeln als Entscheidungsverfahren

Wahrheitstafeln bieten ein Entscheidungsverfahren, um zu bestimmen, ob ein Satz der AL allgemeingültig ist. Dies ist nicht ganz selbstverständlich, sondern ein Satz oder Theorem, das bewiesen werden muß: [45]

Satz. Ein Satz der AL ist genau dann allgemeingültig, wenn in einer Wahrheitstafel unter dem Hauptzeichen nur 'w' auftritt.

Daraus folgt ein weiteres Theorem, das wichtig ist:

Satz. Ob ein Satz der AL allgemeingültig ist, läßt sich entscheiden.

Auch dies ist nicht selbstverständlich.

Alles Gesagte gilt, wie sich zeigen wird, auch für die Prüfung auf Allgemeingültigkeit von Sätzen der AL, die aus Teilsätzen aufgebaut sind; man kann also in der Wahrheitstafel statt der Elementarsätze a, b usw. ggf. auch die (echten) Teilsätze A, B usw. eintragen.

Damit sind die Vorzüge der Wahrheitstafeln genannt; ihr **Nachteil** ist durch die Beispiele aber schon offenkundig: Wahrheitstafeln sind ein mächtiges Entscheidungsverfahren, aber bei vielen Elementar- bzw. Teilsätzen ein aufwendiges: Bei n Elementarsätzen hat die Wahrheitstafel 2^n Zeilen; bei 4 Elementarsätzen braucht man also 16 Zeilen, bei 5 Elementarsätzen schon 32 Zeilen – spätestens dann wird es unübersichtlich. Es gibt praktischere Entscheidungsverfahren [46]; uns geht es hier aber v. a. um das Grundsätzliche.

7.5. Das Ersetzungstheorem (Substitutionstheorem)

Ersetzungstheorem. Sei T eine aussagenlogische Tautologie mit den Elementarsätzen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dann gilt: Ersetzt (substituiert) man jedes Vorkommen eines Elementarsatzes a_i durch einen beliebigen Satz A, so ist der so gebildete Satz T' ebenfalls eine Tautologie.

Beispiel. In der Tautologie

$$\models a \supset (a \vee b) \qquad\qquad a,\ b \text{ Elementarsätze}$$

[45] Zu einem Beweis des Theorems s. Oberschelp, 52–53.
[46] Vgl. die Bemerkungen in Oberschelp, S. 64.

dürfen wir z. B. den Elementarsatz 'a' durch den Satz 'A' = '$(p \wedge r)$' und 'b' durch 'B' = '$(b \wedge b)$' ersetzen:

$$\models (p \wedge r) \supset \big((p \wedge r) \vee (b \wedge b)\big),$$

oder kürzer:

$$\models A \supset (A \vee B) \qquad A, B \text{ Sätze}$$

Nutzen des Ersetzungstheorems: Es hilft uns bei Umformungen, und es erlaubt uns, bei allen Tautologien anstelle der Elementarsätze beliebige Sätze zu schreiben.

Beweisidee. Wir betrachten den durch Ersetzung entstandenen Satz T'. Die Bewertung der für a_i substituierten Teilsätze S_i sind je nach Bewertung wahr oder falsch. Da aber T allgemeingültig, also unter jeder Bewertung wahr ist, ist auch T' wahr.

7.6. Wichtige Tautologien

Satz vom (ausgeschlossenen) Widerspruch

$$\models \neg(A \wedge \neg A)$$

Tertium non datur ('ein Drittes wird nicht gegeben')

$$\models A \vee \neg A$$

Gesetze der Idempotenz von $\wedge$ und $\vee$:

$$\models A \wedge A \equiv A$$

$$\models A \vee A \equiv A$$

Duplex negatio affirmat ('die doppelte Verneinung bejaht')

$$\models \neg\neg A \equiv A$$

Kommutativgesetze

$$\models A \wedge B \equiv B \wedge A$$

$$\models A \vee B \equiv B \vee A$$

Assoziativgesetze

$$\models A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$$

$$\models A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$$

Distributivgesetze

$$\models (A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$\models (A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

de Morgansche Gesetze

$\models \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

$\models \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

Adjunktive Abschwächung

$\models A \supset (A \vee B)$

$\models A \supset (B \vee A)$

Subjunktion

$\models (A \supset B) \equiv \neg A \vee B$

$\models (A \supset B) \wedge A \supset B$

$\models (A \supset B) \wedge \neg B \supset \neg A$

Kontraposition

$\models (A \supset B) \equiv (\neg B \supset \neg A)$

Peirce's law

$\models \big((A \supset B) \supset A\big) \supset A$

Consequentia mirabilis ('die sonderbare Subjunktion'; auch: Lex Clavia)

$\models (\neg A \supset A) \supset A$

$\models (A \supset \neg A) \supset \neg A.$

7.7. Aussagenlogische Ungültigkeit

Wir führen abschließend noch die Begriffe der aussagenlogischen Ungültigkeit von Sätzen bzw. Aussagen und den der aussagenlogischen Konsistenz ein. (Hier geht es uns eigentlich nur um die Begriffe 'Ungültigkeit' und 'Konsistenz'.)

Definition. Ein Satz A der AL heißt **aussagenlogisch ungültig** (oder: widersprüchlich, kontradiktorisch, inkonsistent; auch: aussagenlogisch falsch) genau dann, wenn er unter (bei) jeder Bewertung falsch ist. Man schreibt: $A \models$.

Wiederum kennen Sie schon einen aussagenlogisch ungültigen Satz, und zwar vom Satz vom (ausgeschlossenen) Widerspruch:

$A \wedge \neg A \models.$

Wiederum: Nicht der Satz '$A \wedge \neg A$' ist der Satz vom Widerspruch, sondern die Metaaussage, dieser Satz sei von keiner Aussage wahr: '$A \wedge \neg A \models$'. Auch dieser Satz sagt er uns wiederum nichts, was wir nicht schon wüßten. Diese Eigenschaft teilt er wiederum mit allen widersprüchlichen Sätzen: Auch sie besagen im eigentlichen Sinne nichts – denn was immer man für die Satzbuchstaben (hier: A) einsetzt, man erhält

eine falsche Aussage:

> Bacon wrote *Hamlet*, and he didn't (and it is not the case that Bacon wrote *Hamlet*).

Wer diese Aussage liest, erfährt nichts über Bacon, den *Hamlet*, oder irgendetwas sonst. Er oder sie kann beurteilen, daß diese Aussage falsch ist, ohne den *Hamlet* oder Francis Bacon kennen zu müssen; man muß nicht einmal wissen, wer oder was die beiden sind. Verstehen muß man allein die logische Form der Aussage, also die aussagenlogische Form des Satzes. – Dies ist erneut seltsam, und man könnte sich z. B. fragen, ob diese Aussage tatsächlich (wenn dies der Fall ist) überhaupt etwas über den *Hamlet* oder Francis Bacon *aussagt* oder behauptet? Sie tut es nicht.[47] (Dies ist auch der Grund, warum wir lieber von 'Ungültigkeit' als von 'aussagenlogischer Falschheit' sprechen – von etwas sinnvoll auszusagen, es sei falsch, legt wenigstens nahe, es könne auch wahr sein, und ungültige/widersprüchliche Sätze können dies nicht.)

Definition. Eine **widersprüchliche Aussage** ist eine Aussage, die eine widersprüchliche logische Form hat; man sagt auch, die Aussage sei 'falsch aufgrund ihrer logischen Form'.

Wahrheitstafeln können ebenfalls dazu dienen zu zeigen, daß ein Satz ungültig ist; dies ist er, wenn unter dem Hauptzeichen nur 'f' auftritt. Das Vorgehen ist dasselbe wie oben:

Beispiel: $A \wedge \neg A$

A	A	$\wedge$	$\neg$	A
w	w	**f**	f	w
f	f	**f**	w	f

Wir belassen es bei diesem einem Beispiel.

7.9. Aussagenlogische Erfüllbarkeit und Kontingenz

Abschließend führen wir noch zwei Begriffe ein, um das Sprechen über Sätze zu vereinfachen:

Definition. Ein Satz A heißt **aussagenlogisch erfüllbar** oder konsistent, wenn er nicht widersprüchlich ist; m.a.W., wenn es (mindestens) eine Bewertung gibt, die ihn wahr macht. Man schreibt (nur in formallogischen Kontexten gebräuchlich): $A \not\models$.

Definition. Ein Satz A heißt **aussagenlogisch kontingent**, wenn er weder allgemeingültig noch ungültig ist.

[47] Vgl. zur Diskussion Hoyningen-Huene, S. 87–92.

Beispiel: $A \equiv (A \supset B)$

A	B
w	w
w	f
f	w
f	f

A	$\equiv$	$(A$	$\supset$	$B)$
w	**w**	w	w	w
w	**f**	w	f	f
f	**f**	f	w	w
f	**f**	f	w	f

Der Satz '$A \equiv (A \supset B)$' ist sowohl erfüllbar (es gibt mindestens ein 'w' unter dem Hauptzeichen) als auch kontingent (es gibt sowohl 'w' als auch 'f' unter dem Hauptzeichen).

8. Semantische Beziehungen zwischen Sätzen

8.1. Semantische Beziehungen zwischen Sätzen
8.2. Aussagenlogische Äquivalenz
8.3. Das Einsetzungstheorem
8.4. Aussagenlogische Widersprüchlichkeit (Inkonsistenz)
8.5. Aussagenlogische Folgerung
8.6. Liste aussagenlogisch gültiger Folgerungen
8.7. Übersicht über die lateinischen Benennungen

8.1. Semantische Beziehungen zwischen Sätzen

Die Sätze der AL sind wie gesagt ohne Bewertung weder wahr noch falsch – es sind ja nur Aussageformen. Es gibt aber – bemerkenswerterweise – bestimmte Sätze, zwischen denen **semantische Beziehungen** bestehen, d. h. Beziehungen zwischen ihren Wahrheitswerten, die **unabhängig von der Bewertung** sind. Vor allem drei Fälle sind interessant:

1. bestimmte Sätze haben *unter jeder Bewertung* denselben Wahrheitswert; man nennt solche Sätze *aussagenlogisch äquivalent*;

2. bestimmte Sätze sind *unter jeder Bewertung* nicht alle zugleich wahr; diese nennt man *aussagenlogisch unvereinbar* oder *inkonsistent*;

3. schließlich gilt für bestimmte Sätze *unter jeder Bewertung*: Sind einige dieser Sätze (die Prämissen) wahr, dann ist auch ein anderer (die Konklusion) wahr; dann sagt man, dieser *folgt aussagenlogisch* aus jenen.

Der dritte Punkt ist der für uns eigentlich interessante; mit ihm gewinnen wir eine **Definition der aussagenlogischen Gültigkeit einer Folgerung**.

8.2. Aussagenlogische Äquivalenz

Definition. Zwei Sätze A, B heißen **aussagenlogisch äquivalent** genau dann, wenn sie unter jeder Bewertung den selben Wahrheitswert haben. Man schreibt: $A \iff B$.

Für aussagenlogisch äquivalente Sätze gilt:

Satz. Zwei Sätze A, B sind aussagenlogisch äquivalent genau dann, wenn ihre Bisubjunktion allgemeingültig ist:

$$A \iff B \quad \text{gdw.} \quad \models A \equiv B.$$

Dies ist nach der Definition der Bisubjunktion genau dann der Fall, wenn A und B unter gleichen Bewertungen immer den selben Wahrheitswert haben.

Nachweis der Äquivalenz. Prüfen läßt sich die aussagenlogische Äquivalenz von zwei Sätzen damit einfach, indem man prüft, ob die Sätze unter allen Bewertungen (in jeder einzelnen Zeile der Wahrheitstafel) den selben Wahrheitswert haben:

A	B	A	$\supset$	B	$\neg$	B	$\supset$	$\neg$	A
w	w	w	**w**	w	f	w	**w**	f	w
w	f	w	**f**	f	w	f	**f**	f	w
f	w	f	**w**	w	f	w	**w**	w	f
f	f	f	**w**	f	w	f	**w**	w	f

Dies ist ja nichts anderes, als zu prüfen, ob die Bisubjunktion der Sätze allgemeingültig ist:

A	B	$(A$	$\supset$	$B)$	$\equiv$	$(\neg B$	$\supset$	$\neg A)$		
w	w	w	w	w	**w**	f	w	w	f	w
w	f	w	f	f	**w**	w	f	f	f	w
f	w	f	w	w	**w**	f	w	w	w	f
f	f	f	w	f	**w**	w	f	w	w	f

Beispiele. Alle allgemeingültigen Bisubjunktionen in der Liste der Tautologien (7.6) liefern damit Beispiele für aussagenlogisch äquivalente Sätze, z. B.:

$\neg\neg A \iff A$ $\qquad$ $\models \neg\neg A \equiv A$ (Duplex negatio affirmat)

$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$ $\qquad$ $\models \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (de Morgan)

$A \supset B \iff \neg B \supset \neg A$ $\qquad$ $\models A \supset B \equiv \neg B \supset \neg A$ (Kontraposition)

8.3. Das Einsetzungstheorem

Aussagenlogisch äquivalente Sätze darf man *allgemein* füreinander einsetzten:

Einsetzungstheorem. Sei S ein Satz der AL mit dem (echten) Teilsatz E. Ist $E \iff E'$, so kann man in S E' für E einsetzen, so daß man S' erhält, und es gilt: $S' \iff S$.[48]

[48] Zum Beweis vgl. Hoyningen-Huene, S. 133.

Das Einsetzungstheorem erlaubt es, alle logischen Äquivalenzen – eben die allgemeingültigen Bisubjunktionen in der Liste der Tautologien in 7.6 – für Umformungen zu nutzen. Insbesondere gestattet es, Sätze zu vereinfachen, aber auch, bestimmte Junktoren zu eliminieren (durch andere zu ersetzten).

Beispiel. Der Satz '$(\neg A \supset A) \supset A$' (aus der Tautologie 'Consequentia mirabilis'; vgl. 6.6) läßt sich durch wiederholte Einsetzungen aussagenlogisch äquivalenter Sätze zum Satz '$\neg A \vee A$' umformen (daß es sich um eine Tautolgie handelt, ist unerheblich):

$$\begin{aligned}
(\neg A \supset A) \supset A &\iff \neg(\neg A \supset A) \vee A && \text{mit } (B \supset C) \iff (\neg B \vee C) \\
&\iff \neg(\neg\neg A \vee A) \vee A && \text{mit } (B \supset C) \iff (\neg B \vee C) \\
&\iff \neg(A \vee A) \vee A && \text{mit } \neg\neg A \iff A \\
&\iff \neg A \vee A && \text{mit } (A \vee A) \iff A.
\end{aligned}$$

Es gilt also:

$$(\neg A \supset A) \supset A \iff \neg A \vee A.$$

8.4. Aussagenlogische Widersprüchlichkeit (Inkonsistenz)

Zur Bezeichnung einer Menge von Sätzen der AL verwenden wir im folgenden große griechische Buchstaben.

Definition. Eine Menge von Sätzen Γ heißt **aussagenlogisch widersprüchlich** (inkonsistent, unverträglich) genau dann, wenn in keiner Interpretation/Bewertung alle Sätze der Menge wahr sind. Man schreibt (nur in fomallogischen Kontexten gebräuchlich): $\Gamma \models$.

Für zwei Sätze A und B gilt natürlich: Sie sind genau dann inkonsistent, wenn ihre Konjunktion ungültig ist:

$A,\ B \models$ gdw. $A \wedge B \models$.

Inkonsistente Sätze können nicht zugleich wahr sein.

Beispiel. Die Sätze '$A \supset B$' und '$A \wedge \neg B$' sind inkonsistent; der Nachweis läßt sich wiederum durch eine Wahrheitstafel führen, indem man zeigt, daß unter keiner Bewertung (in jeder Zeile) beide Sätze wahr sind:

A	B	A	$\supset$	B	A	$\wedge$	$\neg$	B
w	w	w	**w**	w	w	**f**	f	w
w	f	w	**f**	f	w	**w**	w	f
f	w	f	**w**	w	f	**f**	f	w
f	f	f	**w**	f	f	**f**	w	f

Dies ist gemäß dem Satz wiederum dasselbe ist wie ein direkter Nachweis, daß die Konjunktion '$(A \supset B) \wedge (A \wedge \neg B)$' ungültig ist:

A	B	$(A$	$\supset$	$B)$	$\wedge$	$(A$	$\wedge$	$\neg$	$B)$
w	w	w	w	w	**f**	w	f	f	w
w	f	w	f	f	**f**	w	w	w	f
f	w	f	w	w	**f**	f	f	f	w
f	f	f	w	f	**f**	f	f	w	f

Definition. Ist eine Menge von Sätzen Γ nicht aussagenlogisch inkonsistent, nennt man sie **aussagenlogisch verträglich (konsistent)**; man schreibt: $\Gamma \not\models$.

8.5. Aussagenlogische Folgerung

Ein Argument hieß gültig gdw. gilt: Sind die Prämissen wahr, ist auch die Konklusion wahr; man sagt, die Konklusion folgt logisch aus den Prämissen. Diese Definition läßt sich einfach auf die AL übertragen:

Definition. Ein Satz K **folgt aussagenlogisch** aus einer Menge von Sätzen Π genau dann, wenn gilt: Unter jeder Bewertung, die alle Sätze der Menge Π wahr macht, ist auch K wahr. Man schreibt: $\Pi \models K$.

Spezialfall. Ein Satz K folgt aussagenlogisch aus P genau dann, wenn gilt: In jeder Bewertung, die P wahr macht, ist auch K wahr. Man schreibt:

$$P \models K.$$

Wiederum gibt es eine Verbindung zwischen der semantischen Beziehung (hier der der gültigen Folgerung) und der Allgemeingültigkeit einer bestimmten Art von Sätzen (hier von Subjunktionen):

Satz. Ein Satz K folgt aussagenlogisch aus einer Menge von Sätzen $P_1, \ldots, P_n$ genau dann, wenn gilt: Die Subjunktion $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \supset K$ ist allgemeingültig:

$$P_1, \ldots, P_n \models K \quad \text{gdw.} \quad \models P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \supset K.$$

Die Subjunktion '$P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \supset K$' ist ja nach Definition genau dann allgemeingültig, wenn unter allen Bewertungen gilt: Ist der Satz '$P_1 \wedge \ldots \wedge P_n$' wahr, dann ist auch '$K$' wahr.

Spezialfall. Für zwei Sätze P und K gilt:

$$P \models K \quad \text{gdw.} \quad \models P \supset K.$$

Beweis des Spezialfalls.[49] Der Beweis teilt sich auf in zwei Beweise 'in beide Richtungen': Wir zeigen zuerst, daß 'wenn $P \models K$, dann $\models P \supset K$', und dann, daß 'wenn $\models P \supset K$, dann $P \models K$':

'$P \models K$' bedeutet, daß K logisch aus P folgt. Also ist bei jeder Bewertung, die P wahr macht, auch K wahr. Bei jeder solchen Bewertung ist auch '$P \supset K$' wahr (nach der Definition der Subjunktion); somit gilt '$\models P \supset K$'.

'$\models P \supset K$' bedeutet, daß '$P \supset K$' allgemeingültig, also unter jeder Bewertung wahr ist. Dann folgt, daß es keine Bewertung gibt, unter der P wahr ist, K aber falsch; somit gilt '$P \models K$'.

Damit läßt sich wiederum mit Hilfe von Wahrheitstafeln überprüfen, ob ein Satz aussagenlogisch aus einem anderen oder einer Menge von Sätzen folgt, indem man die entsprechende Subjunktion der Sätze auf Allgemeingültigkeit prüft; Beispiele finden sich im folgenden Abschnitt (9.6).

8.6. Liste aussagenlogisch gültiger Folgerungen

Eine Reihe wichtiger gültiger Folgerungen hat einen eigenen Namen; die folgende Liste umfaßt eine Auswahl. Bei einigen geben wir exemplarisch Nachweise der Gültigkeit durch das Wahrheitstafelverfahren.

(i) Modus ponendo ponens oder kurz **Modus ponens** (Abtrennungsregel).

$A, A \supset B \models B.$

Zur Benennung: Das lat. Verb 'ponere' = 'setzen, behaupten' bezeichnet eine nicht negierte Aussage. 'Modus ponendo ponens' bezeichnet also die Argumentform ('modus'), bei der durch Behaupten ('ponendo') einer (nicht-negierten) Aussage ('A') eine andere (nicht-negierte) Aussage ('B') behauptet wird ('ponens').[50]

Daß die Folgerung aussagenlogisch gültig ist, läßt sich mit Hilfe einer Wahrheitstafel zeigen. Für alle möglichen Bewertungen nimmt man eine Wahrheitswertanalyse einmal der Prämissen und der Konklusion vor; wenn in allen Zeilen, in denen die Prämissen wahr sind, auch die Konklusion wahr ist, ist die Folgerung gültig.

In der folgenden Wahrheitstafel stehen links erst die Satzbuchstaben A und B, dann die Prämissen und schließlich rechts die Konklusion. Die Wahrheitswerte von Prämissen und Konklusion sind unter den Hauptzeichen bzw. den Sätzen hervorgehoben:

[49] Zum allgemeinen Beweis, der analog geht, siehe Oberschelp, S. 48–49.

[50] Wörtlich: 'Die durch Behaupten behauptende Argumentform'; 'ponens' ist ein Partizip (das Partizip Präsens Aktiv), 'ponendo' ein Verbalsubstantiv (das sog. Gerundium) im Ablativus instrumentalis.

A	B	A	A	$\supset$	B	B
w	w	**w**	w	**w**	w	**w**
w	f	**w**	w	**f**	f	**f**
f	w	**f**	f	**w**	w	**w**
f	f	**f**	f	**f**	f	**f**

Man müßte die Tafel nicht zur Gänze ausfüllen, denn relevant sind nur Zeilen, in denen alle Prämissen wahr sind und die Konklusion falsch ist. Da hier eine der Prämissen und die Konklusion nicht zusammengesetzt sind, könnte man sich gleich nach dem Eintragen der Bewertungen der einfachen Sätze auf die 2. Zeile beschränken, da nur in den Zeilen 1 und 2 alle Prämissen wahr sein können, und nur in Zeile 2 und 4 die Konklusion falsch ist.

Alternatives Verfahren. Man könnte, statt die Prämissen und Konklusion einer Folgerung in der Wahrheitstafel getrennt auszuwerten, auch den Zusammenhang zwischen der Gültigkeit einer Folgerung und der Allgemeingültigkeit der entsprechenden Subjunktion ausnutzen; es gilt ja z. B. (bei zwei Prämissen):

$$P_1,\ P_2 \models K \quad \text{gdw.} \quad \models (P_1 \wedge P_2) \supset K.$$

also im Fall des Modus ponendo ponens:

$$A,\ (A \supset B) \models B \quad \text{gdw.} \quad \models \big(A \wedge (A \supset B)\big) \supset B.$$

Man könnte also in der Wahrheitstafel auch den Satz '$\big(A \wedge (A \supset B)\big) \supset B$' auf Allgemeingültigkeit prüfen:

A	B	$\big(A$	$\wedge$	$(A$	$\supset$	$B)\big)$	$\supset$	B
w	w	w	w	w	w	w	**w**	w
w	f	w	f	w	f	f	**w**	f
f	w	f	w	f	w	w	**w**	w
f	f	f	f	f	f	f	**w**	f

(ii) Modus tollendo tollens oder kurz **Modus tollens**.

$$\neg A,\ B \supset A \models \neg B.$$

Zur Benennung: Lat. 'tollere' = 'aufheben, leugnen' bezieht sich auf eine negierte Aussage. 'Modus tollendo tollens' bezeichnet also die Argumentform (modus), bei der durch eine negierte Aussage ('$\neg A$') eine andere negierte Aussage ('$\neg B$') folgt.

Beweis durch Wahrheitstafel:

A	B	$\neg$	A	B	$\supset$	A	$\neg$	B
w	w	**f**	w	w	**w**	w	**f**	w
w	f	**f**	w	f	**w**	w	**w**	f
f	w	**w**	f	w	**f**	f	**f**	w
f	f	**w**	f	f	**w**	f	**w**	f

Wiederum könnte man sich einen Teil der Mühe sparen: Wenn man mit der Auswertung der Konklusion beginnt (dies empfiehlt sich oft, wenn die Konklusion kurz ist, da es nur eine Konklusion, aber mehrere Prämissen gibt), kann man sich gleich auf die Zeilen 1 und 3 beschränken; wertet man als zweites die kürzere Prämisse ($\neg A$) aus, erkennt man, daß nur noch Zeile 3 relevant ist:

A	B	$\neg$	A	B	$\supset$	A	$\neg$	B
w	w	**f**	w				**f**	w
w	f						**w**	f
f	w	**w**	f	w	**f**	f	**f**	w
f	f						**w**	f

Alternativ kann man wiederum wegen

$\neg A,\ B \supset A \models \neg B$ gdw. $\models \big(\neg A \wedge (B \supset A)\big) \supset \neg B$

auch die Allgemeingültigkeit von '$\big(\neg A \wedge (B \supset A)\big) \supset \neg B$' zeigen:

A	B	$\big(\neg$	A	$\wedge$	$(B$	$\supset$	$A)\big)$	$\supset$	$\neg$	B
w	w	f	w	f	w	w	w	**w**	f	w
w	f	f	w	f	f	w	w	**w**	w	f
f	w	w	f	f	w	f	f	**w**	f	w
f	f	w	f	w	f	w	f	**w**	w	f

(iii) Modus ponendo tollens oder konjunktiver Syllogismus. Die Prämisse ('A') ist nicht verneint, aber die Konklusion ('$\neg B$'):

$A,\ \neg(A \wedge B) \models \neg B.$

(iv) Modus tollendo ponens oder disjunktiver Syllogismus. Der Name verweist wieder darauf, daß unter den Prämissen eine verneinte ist ('$\neg A$'), die Konklusion ('B') aber nicht verneint wird:

$\neg A,\ A \vee B \models B.$

(v) Hypothetischer Syllogismus:

$A \supset B,\ B \supset C \models A \supset C.$

(vi) Dilemma:

$A \supset B,\ \neg A \supset B \models B.$

Beweis durch Wahrheitstafel; die Wahrheitswerte der Hauptzeichen von Prämissen und Konklusion sind wiederum hervorgehoben.

A	B	A	$\supset$	B	$\neg$	A	$\supset$	B	B
w	w	w	**w**	w	f	w	**w**	w	**w**
w	f	w	**f**	f	f	w	**w**	f	**f**
f	w	f	**w**	w	w	f	**w**	w	**w**
f	f	f	**w**	f	w	f	**f**	f	**f**

(vii) Ex falso quodlibet (sequitur) oder **Ex contradictione quodlibet**: Aus einem Widerspruch folgt jeder Satz (da es nie der Fall sein kann, daß alle Prämissen wahr, die Konklusion aber falsch ist, wenn die Prämissen inkonsistent sind). Also gilt für eine beliebige *widersprüchliche* Menge von Prämissen, z. B. $F \wedge \neg F$, und einen beliebigen Satz A:

$$F \wedge \neg F \models A.$$

Zur Benennung: 'ex falso quodlibet sequitur' (lat.) bedeutet 'aus Falschem folgt Beliebiges'; 'falsum' muß hier als 'logisch falsch' (inkonsistent) verstanden werden.

(viii) Verum ex quolibet[51] **(sequitur)**: Tautologien folgen aus beliebigen Prämissen – da es nie der Fall sein kann, daß die Prämissen wahr, die Konklusion aber falsch ist, wenn die Konklusion eine Tautologie ist. Also gilt für beliebige Prämissen Σ und eine beliebige Tautologie, z. B. $V \vee \neg V$:

$$\Sigma \models V \vee \neg V.$$

Zur Benennung: 'verum ex quolibet sequitur' (lat.) bedeutet 'Wahres folgt aus Beliebigem'; 'verum' muß hier als 'logisch wahr' (tautologisch) verstanden werden.

9.7. Übersicht über die lateinischen Benennungen

Die ersten vier genannten Folgerungen sind einfach die vier Arten, von einer einfachen bejahten bzw. negierten Prämisse ('A' bzw. '$\neg A$') auf eine einfache bejahte bzw. negierte Konklusion ('B' bzw. '$\neg B$') zu schließen:

Modus ponendo ponens:	$A,\ A \supset B$	$\models$	B
Modus ponendo tollens:	$A,\ \neg(A \wedge B)$	$\models$	$\neg B$
Modus tollendo ponens:	$\neg A,\ A \vee B$	$\models$	B
Modus tollendo tollens:	$\neg A,\ B \supset A$	$\models$	$\neg B$

Folgt eine Konklusion nicht logisch aus den Prämissen, spricht man auch von einem **formalen Fehlschluß** oder **non sequitur** (lat. 'es folgt nicht'). Ein Fehlschluß, die Fallacia consequentis (gr. 'παρὰ τὸ ἑπόμενον'), trägt als einziger formaler Fehlschluß

[51] 'Quolibet' bitte ohne 'd'.

ebenfalls einen eigenen Namen:[52]

Fallacia consequentis: $A, \quad B \supset A \quad \not\models \quad B$

Im Deutschen heißt er **Fehlschluß der Bejahung des Konsequens** nach dem englischen 'fallacy of affirming the consequent'.

[52] Hamblin (*Fallacies*, London 1970, S. 37) wundert sich, warum man ihm einen eigenen Namen gegeben hat: 'Every invalid inference-schema of the propositional calculus [...] could, in theory, be dignified with a special name and treated similarly, yet we do not hear of any others.' Der Grund dürfte sein, daß dieser Fehlschluß in vielen methodologischen Kontexten eine wichtige Rolle spielt. (Aristoteles führt ihn interessanterweise nicht unter den formalen Fehlschlüssen auf; vgl. ib., S. 36.)

9. Metalogik

9.1. Metalogik
9.2. Die Vollständigkeit des Junktorensystems
9.3. Die Wahl des Junktorensystems
9.4. Sind Tautologien 'allgemeingültige Sätze' oder 'logische Wahrheiten'?
9.5. Logik als Lehre der gültigen Folgerung oder der logischen Wahrheit?
9.6. Die Paradoxien der materialen Implikation
9.7. Die moderne Klassifikation von Schlüssen

9.1. Metalogik

In den folgenden Anmerkungen zur Metalogik betreiben wir nicht Logik (untersuchen Folgerungen), sondern denken über Logik nach und besonders über einige Entscheidungen, die wir bislang getroffen haben.

Zuerst kommen wir auf das Junktorensystem der AL zurück und zeigen zuerst, daß sich alle wahrheitsfunktionalen Aussagenverknüpfungen durch die Junktoren ausdrücken lassen, und fragen, warum wir gerade die Junktoren eingeführt haben, die wir eingeführt haben.

Als zweites betrachten wir Fragen, die mit der Definition der logischen Folgerung zusammenhängen, und motivieren, warum wir Tautologien 'allgemeingültige Sätze' nennen; warum die Logik bestimmt wird als die Lehre der logischen Folgerung und nicht die Lehre von den Tautologien (wenn doch Tautologien gültige Folgerungen entsprechen), und inwiefern die Bestimmung der logischen Folgerung überhaupt befriedigend ist.

Abschließend betrachten wir kurz die klassische und die moderne Art, Schlüsse allgemein zu klassifizieren (gültige und nicht-gültige Schlüsse voneinander abzugrenzen).

9.2. Die Vollständigkeit des Junktorensystems

Wir haben (in Kap. 6) gezeigt, daß sich rekursiv beliebig komplexe Sätze aus den in AL vorhandenen Junktoren bilden lassen. Aber noch nicht gezeigt ist, daß sich

alle wahrheitsfunktionalen Sätze mit diesen Junktoren bilden lassen – könnte es vielleicht Sätze geben, die aus Elementarsätzen wahrheitsfunktional aufgebaut sind, die wir aus irgendwelchen Gründen 'vergessen' haben?

Man könnte z. B. folgende Überlegung anstellen: Die Negation '$\neg$' ist ein einstelliger Junktor (abhängig von nur einem Elementarsatz); hätten wir nur die Negation eingeführt, könnten wir aber keinen der vier anderen, zweistelligen Junktoren '$\wedge$', '$\vee$', '$\supset$' und '$\equiv$' ausdrücken (versuchen Sie es!). Könnte es dann nicht sein, daß analog die ein- und zweistelligen Junktoren der AL nicht ausreichen, um alle z. B. möglichen zwei-, drei- oder sogar vierstelligen Wahrheitsfunktionen auszudrücken? [53]

Wir werden im folgenden zeigen, daß dies nicht der Fall ist, indem wir zeigen, daß genaugenommen schon die drei Junktoren '$\neg$', '$\wedge$' und '$\vee$' ausreichen, um jeden wahrheitsfunktional aus zwei Elementarsätzen a und b aufgebauten Satz S zu bilden ('auszudrücken'). Die Beweisidee läßt sich aber offenkundig auf Sätze, die aus mehr als zwei Elementarsätzen gebildet sind, übertragen, so daß sich der Beweis für beliebige Sätze führen ließe. Bewiesen ist damit die sog. **Vollständigkeit des Junktorensystems** mit '$\neg$', '$\wedge$' und '$\vee$', und damit zugleich die **Vollständigkeit des Junktorensystems der AL**. Da sich '$A \supset B$' als '$\neg A \vee B$' ausdrücken läßt, und '$A \equiv B$' wiederum als '$(A \supset B) \wedge (B \supset A)$', hätte man Subjunktion und Bisubjunktion eigentlich sogar weglassen können.

Beweis der Vollständigkeit des Junktorensystems von AL

Seien a und b Elementarsätze, und S ein beliebiger wahrheitsfunktionaler Satz der Elementarsätze a und b. Wenn S wahrheitsfunktional aus a und b aufgebaut ist, dann läßt sich die wahrheitsfunktionale Abhängigkeit in einer Wahrheitstafel schreiben., z. B. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit):

a	b	S
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	w

Dies ist jetzt offenkundig keiner der bekannten Junktoren. Unter S sind Wahrheitswerte eingetragen, und in irgendwelchen Zeilen steht ein 'w', in anderen ein 'f' – hier zufälligerweise ein 'w' in der ersten, zweiten und vierten Zeile, ein 'f' in der dritten.

Nennen wir die Bewertung der Elementarsätze in Zeile n die 'n-te Bewertung'. (Bei zwei Elementarsätzen gibt es gerade vier, bei mehr Elementarsätzen mehr, aber darauf

[53] Daß wir *einige* dreistellige Wahrheitsfunktionen ausdrücken können, läßt sich leicht klar machen: z. B. sei '$a \wedge b \wedge c$' der dreistellige Junktor, der genau dann wahr ist, wenn a, b und c wahr sind; der läßt sich leicht aus '$(a \wedge b) \wedge c$' oder '$a \wedge (b \wedge c)$' ausdrücken.

kommt es nicht an.)

Ein Satz S ist allgemein genau dann wahr, wenn irgendeine der Bewertungen vorliegt, die ihn wahr machen – in diesem Fall also gerade unter der ersten, der zweiten oder der vierten Bewertung.

Unter der ersten Bewertung ist '$(a \wedge b)$' wahr; unter der zweiten ist '$(a \wedge \neg b)$' wahr; und unter der vierten ist '$(\neg a \wedge \neg b)$' wahr.

Also ist S genau dann wahr, wenn einer dieser drei Sätze wahr ist, d. h.:

$$S \iff (a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg b).$$

Es läßt sich also nach diesem Verfahren also **jeder Satz als Adjunktion von Konjunktionen der (ggf. negierten) Elementarsätze ausdrücken**. (Man nennt diese Form auch die **adjunktive Normalform** eines a.l. Satzes.) Da das Verfahren unabhängig davon ist, in welchen Zeilen 'w' steht, und auch von der Zahl der Zeilen (der Zahl der Elementarsätze), gilt dies allgemein: Die Junktoren '$\neg$', '$\wedge$' und '$\vee$' bilden ein vollständiges Junktorensystem.[54]

9.3. Die Wahl des Junktorensystems

Das Junktorensystem der AL ist also vollständig, aber zugleich auch **redundant** und **willkürlich**. Es ist redundant (hat überflüssige Junktoren), insofern sich '$A \supset B$' als '$\neg A \vee B$' ausdrücken läßt, und '$A \equiv B$' wiederum als '$(A \supset B) \wedge (B \supset A)$', so daß man wie gesagt Subjunktion und Bisubjunktion eigentlich auch hätte weglassen können.[55] Es ist willkürlich, insofern es andere Junktorensysteme gibt, die ebenfalls vollständig sind.

Zwei sehr sparsame vollständige Junktorensysteme haben jeweils nur einen Junktor, nämlich den sog. **Peirce-Pfeil** '$\downarrow$' (auch '$\bar{\vee}$') bzw. den sog. **Sheffer-Strich** '$|$', die folgendermaßen definiert sind:[56]

A	B	$A \downarrow B$
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

[54] Zum Beweis für dreistellige Wahrheitsfunktionen s. Oberschelp, S. 60–61.

[55] Dies gilt sogar auch für entweder die Konjunktion oder die Adjunktion: auch die Junktorensysteme $\{\neg, \wedge\}$ und $\{\neg, \vee\}$ sind vollständig.

[56] Nach dem Pragmatisten Charles S. Peirce bzw. dem Mathematiker Henry Sheffer; vgl. Charles Sanders Peirce, A Boolean Algebra with One Constant (1880). *Writings of Charles S. Peirce*, Bd. 4 (ed. C. Kloesel), Bloomington und Indianapolis 1989, S. 218–221 (= *Collected Papers of Charles S. Peirce* (ed. C. Hartshorne, P. Weiss) IV, S. 12–20; CP 4.215–216); Henry Maurice Sheffer, A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants. *Transactions of the American Mathematical Society* 14 (4), 1913, S. 481–488.

A	B	$A \mid B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

Daß diese Junktoren jeweils ein vollständiges System bilden, kann man einfach zeigen, indem man angibt, wie sich die drei Junktoren '$\neg$', '$\wedge$' und '$\vee$' durch '$\downarrow$' bzw. '$|$' ausdrücken lassen. Für den Peirce-Pfeil ist dies (bitte prüfen):

$$\neg A \iff A \downarrow A,$$

$$A \vee B \iff (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B),$$

$$A \wedge B \iff (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B).$$

Ja sich jeder Satz als adjunktive Normalform ausdrücken läßt, läßt sich folglich jeder Satz nur mit dem Peirce-Pfeil ausdrücken. Die entsprechenden Äquivalenzen für den Sheffer-Strich '$|$' lassen sich mit etwas Geduld leicht ermitteln.

Für uns ist dies nur eine Spielerei; es wirft aber die Frage auf, warum wir gerade die Junktoren in der AL definiert haben, die wir definiert haben?

Man könnte antworten: weil diese den aus der Sprache gewohnten Aussageverbindungen 'nicht', 'und', 'oder', 'wenn … dann…' und 'genau dann … wenn …' recht nahekommen. Die Übereinstimmung ist aber – gerade bei der Subjunktion – geringer, als man denken könnte (s. Kap. 9). Eine bessere Antwort wäre: weil die Junktoren den Arten von Aussageverknüpfungen entsprechen, die wir in Argumenten oft gebrauchen.

Wichtiger ist gerade für die Subjunktion ein anderer Punkt: Sie erlaubt uns, den Zusammenhang zwischen bestimmten allgemeingültigen Sätzen und gültigen Folgerungen einfach zu formulieren:

$$P_1, P_2, ..., P_n \models K \quad \text{gdw.} \quad \models (P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \supset K.$$

Mit anderen Worten: Die Subjunktion ist nicht zuletzt wegen der Folgerung unter die Junktoren aufgenommen (und die Bisubjunktion wegen der Äquivalenz).

9.4. Sind Tautologien 'allgemeingültige Sätze' oder 'logische Wahrheiten'?

Tautologien werden sowohl 'allgemeingültige Sätze', aber auch oft als 'aussagenlogische Wahrheiten' genannt. Beide Benennungen sind korrekt in dem Sinne, daß sie gebräuchlich und eindeutig sind; wir wollen dennoch überlegen, in welcher Hinsicht

beides passende oder unpassende Benennungen sind. (Dies ist nur oberflächlich eine Überlegung zum Sprachgebrauch.)

Tautologien '**aussagenlogische Wahrheiten**' zu nennen, betont den folgenden Aspekt: Tautologien sind Sätze, die unter jeder Bewertung wahr sind; eine Aussage, der die logische Form einer Tautologie hat, ist 'wahr aufgrund ihrer logischen Form'. Diese Benennung bringt gut zum Ausdruck, daß sie immer einen bestimmten Wahrheitswert haben (etwa, wenn man sich für die Wahrheitswertanalyse interessiert).

Darüber hinaus scheint diese Benennung auch in einer weiteren Hinsicht passend: Wir haben anfangs betont, daß Aussagen wahr oder falsch, Argumente hingegen gültig oder ungültig sind, und es scheint daher natürlich zu sein, tautologische Aussagen und Sätze (als Aussagenschemata) ebenfalls als '(logisch) *wahr*', nicht aber als '(allgemein-)*gültig*' zu bezeichnen; dies scheint auf den ersten Blick die Unterscheidung von Argumenten und Aussagen durcheinander zu werfen.

Gegen die Benennung als 'aussagenlogische Wahrheiten' spricht vielleicht, daß die Wahrheit einer tautologischen Aussage nicht dieselbe Art von Wahrheit ist wie die einer wahren Aussage: Eine wahre Aussage ist wahr, weil die Welt ist, wie die Aussage besagt (jedenfalls nach einer Explikation von 'Wahrheit') – eine tautologische Aussage hingegen ist wahr ganz unabhängig davon, wie die Welt ist (eben aufgrund ihrer logischen Form), und wenn man sich z. B. dafür interessiert, was eine Aussage wahr macht, könnte man beides gerade trennen wollen.

Tautologien '**allgemeingültige Sätze**' zu nennen, betont hingegen die Verwandtschaft von Tautologien und gültigen Folgerungen, und diese ist erläuterungsbedürftig. Sowohl bei tautologischen Sätzen als auch bei gültigen Folgerungen handelt es sich um bestimmte *Sätze* bzw. bestimmte *Beziehungen zwischen Sätzen* – also logischen (uninterpretierten/unbewerteten) *Aussageformen* und eben nicht Aussagen. Die Verwandtschaft zwischen beiden zeigt sich darin, daß beide Eigenschaften haben, die ihnen jeweils 'unter allen Bewertungen' zukommen, eben aufgrund ihrer logischen Form: allgemeingültige Sätze sind unabhängig davon wahr, wie die Welt ist (wie die Elementarsätze bewertet werden); gültige Folgerungen sind Beziehungen zwischen Sätzen, die ebenfalls unabhängig davon bestehen, wie die Welt ist (wie die Elementarsätze bewertet werden).

(Eine bestimmte Aussage nennt man (formallogisch) nur in einem abgeleiteten Sinn 'allgemeingültig', ebenso wie ein bestimmtes Argument nur in einem abgeleiteten Sinn 'gültig'.[57])

[57] Dies ist in der formalen Logik plausibel, also dann, wenn man etwa nur über die Aussagenlogik redet oder aber wenn man allgemein meint, *alle* gültigen Argumente seien aufgrund ihrer logischen Form gültig, auch wenn man diese vielleicht noch nicht ausgearbeitet hat.

Diese Verwandtschaft zeigt sich in den **Verbindungen zwischen allgemeingütigen Sätzen und gültigen Folgerungen**: Es sind ja gerade die Folgerungen gültig, denen eine allgemeingültige Subjunktion zugrundeliegt:

$$P_1, P_2, ..., P_n \models K \quad \text{gdw.} \quad \models (P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \supset K.$$

Diesen Zusammenhang kann man ja auch beim Nachweis der Gültigkeit einer Folgerung durch mit Hilfe einer Wahrheitstafel benutzen. Die Verwendungsweisen des 'turnstile' (Gültigkeitszeichens) spiegeln diese Beziehung wieder; in diesem Sinn liest man

$$\models A \vee \neg A.$$

als '$A \vee \neg A$' gilt 'voraussetzungslos' (folgt logisch aus beliebigen Prämissen).

Die Verwandtschaft von allgemeingültigen Sätzen und gültigen Folgerungen besteht auch hinsichtlich des Erkenntnisgewinns: **allgemeingültige Sätze sagen einem nichts** über die Welt, **gültige Folgerungen sagen einem nichts Neues** – sie sind **wahrheitserhaltend**, aber **nicht gehaltserweiternd** (ampliative).

9.5. Logik als Lehre der gültigen Folgerung oder der logischen Wahrheit?

Offen bleibt nach dem Gesagten, ob der Begriff der gültigen Folgerung oder der Begriff der Allgemeingültigkeit von Sätzen in irgendeinem Sinne 'grundlegender' sein könnte (also: Eigenschaften von Sätzen oder Beziehungen zwischen Sätzen).[58] Wenn man die Logik bestimmt als die Lehre von der logischen Folgerung, scheint man der ersten Möglichkeit zuzuneigen; aber man könnte auch sagen, der Begriff der Allgemeingültigkeit sei grundlegender. Der Zusammenhang

$$P_1, P_2, ..., P_n \models K \quad \text{gdw.} \quad \models (P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \supset K.$$

spricht wiederum zunächst einmal dafür, daß *aus einem logischen Blickwinkel* die Frage einfach bedeutungslos ist – man kann sich entscheiden, wie man möchte.

Für die Logik als Lehre von den logischen Wahrheiten spricht eine gewisse Asymmetrie bei der Interpretation des Zusammenhangs. Es scheint ganz natürlich und gut verständlich, gültige Folgerungen auf allgemeingültige Sätze zurückzuführen: Wer das 'zwingende' einer gültigen Folgerung nicht sieht, müßte willens sein, sowohl alle Prämissen dieser Folgerung zu behaupten, zugleich aber die Konklusion zu betreiten – also eine Aussage der logischen Form '$P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \wedge \neg K$' zu behaupten, und sich **damit einfach selbst zu widersprechen**.[59]

[58] Eine ausführliche Behandlung dieser Frage findet sich z. B. in: Ian Hacking, What Is Logic? *A Philosophical Companion to First-Order Logic* (ed. R.I.G. Hughes), Indianapolis/Cambridge 1993, 225–258.

[59] Vgl. Sie die Diskussion in Hoyningen-Huene, S. 113–114 und 77, der schreibt: 'Es ist ... sinnvoll,

Das Umgekehrte gilt nur bedingt: Tautologien aufzufassen als diejenigen Sätze, die 'aus beliebigen Prämissen folgen' (und analog zu sagen, 'aus Kontradiktionen folgten beliebige Sätze' – ex falso quodlibet), ist zumindest künstlich und auch nicht unbedingt befriedigend (s. u.).

Die Auffassung, daß die Logik die Lehre von den logischen Wahrheiten sei, war im späten 19. und frühen 20. Jh. durchaus üblich.[60]

Für die Logik als Lehre der gültigen Folgerung. Trotz dieser Asymmetrie insistieren die meisten Logiker der Gegenwart darauf, daß die Logik als Lehre von der Folgerung verstanden werden müsse; so schreibt etwa Ian Hacking: 'What distinguishes logic from the other branches of knowledge? ... If we must have a one-word answer, logic is the science of deduction.'[61]

Die Gründe sind vielschichtiger und führen tiefer in die Metalogik und die Geschichte der Logik. Sie hängen nicht zuletzt zum einen mit der Frage zusammen, ob man 'logische Wahrheiten' für besonders interessant hält, und zum anderen damit, ob man die Logik axiomatisch aufbauen möchte.

1. Für **Gottlob Frege**, einen der Begründer der modernen Logik, waren **logische Wahrheiten** interessant. Die Entwicklung der modernen Logik durch Frege war ursprünglich verbunden mit einer Zielsetzung, die sich nicht hat erfüllen lassen: das Programm des **Logizismus**. Frege versuchte zu zeigen, daß die Arithmetik auf die Logik reduzierbar sein sollte (und damit zu zeigen, mit Leibniz und gegen Kant, daß die Sätze der Arithmetik analytisch sind, nicht synthetisch). Bertrand Russell zeigte 1902, daß dies nicht möglich ist.[62] Ohne diese Zielsetzung erschienen logische Wahrheiten im Folgenden weniger interessant, und viele betrachten sie heute als Nebenprodukte von Folgerungen (die man eben ohne Prämissen folgern kann) – die Folgerungen selbst aber sind interessanter.[63]

2. Für die AL genügt die Kenntnis des Umgangs mit Wahrheitstafeln, um Allgemeingültigkeit von Sätzen und Gültigkeit von Folgerungen zu überprüfen; allgemein braucht man mächtigere Verfahren, sog. **Kalküle**, um festzustellen, ob Sätze allgemeingültig sind oder aus anderen Sätzen folgen. Man kann logische Kalküle auf zwei verschiedene Weisen aufbauen, die entweder 'Axiome' (Pendants zu allgemeingültigen Sätzen)

vor dem Begriff der logischen Folgerung den der logischen Wahrheit einzuführen' (S. 113).

[60] Der Logiker Willard van Orman Quine etwa beginnt ein Werk zur Logik mit der Feststellung: 'Logic, like any science, has as its business the pursuit of truth.' (W. v. O. Quine, *Methods of Logic*, rev. ed., New York u.a. 1959, xi.)

[61] Ian Hacking, What Is Logic? *A Philosophical Companion to First-Order Logic* (ed. R.I.G. Hughes), Indianapolis/Cambridge 1993, 225–258, hier: S. 229.

[62] Russell zeigte dies durch die berühmte 'Russelsche Antinomie': für die Axiomatisierung der Arithmetik war der Mengenbegriff zentral; der aber erlaubte die Bildung des widersprüchlichen Begriffs der 'Menge aller Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten'.

[63] Zur Idee eines axiomatischen Aufbaus der Logik s. Bostock, S. 190–192.

oder aber 'Schlußregeln' (Pendants zu gültigen Folgerungen) an den Anfang und in den Mittelpunkt stellen.

Ein axiomatischer Aufbau ist in der Mathematik seit Euklid ein Ideal; **Axiome** sind bestimmte Sätze, aus denen dann weitere Sätze abgeleitet werden – Sätze, die, nach einer berühmten Formulierung, die Frege aufgreift, 'eines Beweises weder fähig noch bedürftig' sind.[64] Ein axiomatischer Aufbau (sog. '**Hilbert-Kalküle**') besteht meist als mehreren, aber oft komplizierten Axiomen, und nur wenigen Schlußregeln (teils nur einer einzigen, meist dem Modus ponendo ponens); die Beweise in Hilbert-Kalkülen sind oft aufwendig und zudem 'unnatürlich': sie entsprechen nicht der Art, wie Beweise entwickelt und geführt werden.

Der Mathematiker **Gerhard Gentzen** zeigte in den 30er Jahren des letzten Jahrhunderts, daß ein anderer Aufbau möglich ist, der mit wenigen Axiomen, aber vielen Schlußregeln auskommt, die einzelnen logischen Konstanten zugeordnet werden (sog. '**Gentzen-Kalküle**'); dort sind die Beweise einfacher und auch 'natürlicher'. (Gentzen entwickelte zwei Kalküle, den Kalkül des natürlichen Schließens und den Sequenzen-Kalkül.) Eine Art, die Pointe dieses Ansatzes zu fassen, ist folgender: Statt wie beim axiomatischen Aufbau von Axiomen auszugehen, könnte man ja auch von einer Formel ausgehen, die man schon bewiesen hat – oder aber gleich von irgendeiner Formel (einer 'Annahme'), ohne sich darum zu kümmern, ob diese schon bewiesen ist, und aus dieser alles weitere ableiten. Dann hat man keinen Beweis der Formel, die man erhält, aber einen Beweis, daß diese Formel beweisbar ist, *wenn* die Annahme stimmt. Damit steht die Folgerung, nicht der Beweis, im Zentrum.

9.6. Die Paradoxien der materialen Implikation

Der Zusammenhang zwischen allgemeingültigen Sätzen und gültigen Folgerungen führt zu einem Problem: Die wahrheitsfunktionale Definition der Subjunktion '$A \supset B$' als '$\neg A \vee B$' führt dazu, daß alle Folgerungen aus widersprüchlichen Prämissen(mengen) gültig sind (ex falso quodlibet), ebenso wie alle Folgerungen mit einer allgemeingültigen Konklusion (eine Tautologie 'folgt aus beliebigen Prämissen'). Beides widerspricht einem naheliegenden und natürlichen Verständnis der Folgerungsbeziehung.

Da beide Probleme mit der Definition der Subjunktion oder 'materialen Implikation' verbunden, zählt man sie zu den '**Paradoxien der materialen Implikation**'. Es sind v. a. die folgenden Tautologien, die alle dann paradox erscheinen, wenn man '$A \supset$

[64] 'Ist es dagegen möglich, den Beweis ganz aus allgemeinen Gesetzen zu führen, die selber eines Beweises weder fähig noch bedürftig sind, so ist die Wahrheit a priori.' Gottlob Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische [sic] Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau 1884, S. 4.

B' mit 'Wenn A, dann B' wiedergibt (alle beinhalten Subjunktionen, wenngleich nicht alle als Hauptzeichen); wir kommen auf die Schwierigkeiten mit dieser Lesart zurück, und konzentrieren und hier auf die ersten beiden allgemeingültigen Subjunktionen:

$\models (A \wedge \neg A) \supset B$ (ex falso quodlibet)

$\models A \supset (B \vee \neg B)$ (Schluß auf eine Tautologie)

$\models A \supset (B \supset A)$

$\models \neg A \supset (A \supset B)$

$\models (A \supset \neg A) \vee (\neg A \supset A)$

$\models (A \supset B) \vee (B \supset A)$

Die erste Tautologie entspricht der folgenden gültigen Folgerung:

$\models (A \wedge \neg A) \supset B$ gdw. $A,\ \neg A \models B$.

Es ist nicht möglich, daß die Prämisse wahr, die Konklusion aber falsch ist; zugleich aber besteht auch **kein erkennbarer Folgerungszusammenhang**: Man kann sich leicht Interpretationen überlegen, in denen A und B nichts miteinander zu tun haben – die Folgerung ist aber unabhängig davon gültig. (Da man A und B beliebig interpretieren kann, ergibt sich sogar, daß zwischen *beliebigen* Aussagen A und B Folgerungsbeziehungen bestehen, was seltsam ist.)

Der Kern des Problems ist, daß die Formulierung Aristoteles' '... wenn etwas gesetzt wird, folgt etwas anders notwendig' durch 'es nicht nicht möglich, daß das Gesetzte wahr, das Gefolgerte aber falsch ist' nicht präzise wiedergegeben ist: Die Definition der formalen Gültigkeit ist 'weiter' (schwächer) als die der Gültigkeit von Aristoteles, insofern sie alle Folgerungen aus Kontradiktionen und alle Folgerungen von Tautologien als 'gültig' beschreibt.

Es gibt verschiedene Arten des Umgangs mit dieser Angelegenheit. Die einen sagen, es gebe hier gar kein Problem: Es gebe ja keinen Widerspruch zwischen der herkömmlichen und der logischen Auffassung der Folgerung, sondern diese sei einfach der weitere, aber präzisere Begriff: Das Ziel ist ja eine **Explikation** des Folgerungsbegriffs, die gegebene Explikation ist dem Explikandum ähnlich, exakt, einfach und v. a. fruchtbar: sie gestattet, viele allgemeine Aussagen zu formulieren (s. o., 1.6). Man solle sich daher einfach an diesen Folgerungsbegriff gewöhnen.

Andere beharren darauf, daß die Folgerungsbeziehung besser enger gefaßt werden sollte: gültige Folgerungen sollten **wahrheitserhaltend** sein, und bei Folgerungen der Form Ex falso quodlibet werde nicht die Wahrheit der Prämissen erhalten, die ja widersprüchlich sind und nichts (über die Welt) aussagen können; zugleich scheinen solche Folgerungen in einem seltsamen Sinn **gehaltserweiternd** zu sein. Bei einer

Folgerung auf eine Tautologie wiederum ist deren 'logische Wahrheit' von der der Prämissen einfach unabhängig. Einigkeit über eine befriedigendere Bestimmung gültiger Folgerungen konnte aber nicht erreicht werden.[65]

9.7. Die moderne Klassifikation von Schlüssen

Warum für viele die Aussage, daß gültige Folgerungen dadurch bestimmt sein sollen, daß sie **wahrheitserhaltend**, nicht aber **gehaltserweiternd** sind, läßt sich vor dem Hintergrund der allgemeinen Klassifikation von Schlüssen besser verstehen.

Die **klassische Logik** unterscheidet **deduktive Schlüsse** und **induktive Schlüsse**; die deduktiven Schlüsse sind gültig, die induktiven nicht. Man denkt dabei aber v. a. an zwei besondere Formen von Schlüssen, nämlich Syllogismen einerseits und induktive Verallgemeinerungen andererseits.

Syllogismen sind Schlüsse einer bestimmten logischen Form, z. B.:

All men are mortal.
All kings are men.

All kings are mortal.

Dabei können als Prämissen und Konklusion vier Formen von Aussagen auftreten: 'All men are mortal', Not all men are mortal', 'Some men are mortal' und 'Some men are not mortal'. Seit Aristoteles bis ins 19. Jahrhundert waren Syllogismen das Paradigma gültiger Schlüsse. Sie sind wahrheitserhaltend, sagen einem aber nichts Neues.

Induktive Verallgemeinerungen folgen einer anderen Form:

King Charles I. is mortal.
King Charles II. is mortal.
King Henry VIII. is mortal.

All kings are mortal.

Hier schließt man von Einzelfällen auf eine allgemeine Aussage. Induktive Verallgemeinerungen sind nicht wahrheitserhaltend, aber gehaltserweiternd.

Diese beiden Arten von Paradefällen von Schlüssen haben dazu geführt, daß man deduktive Schlüsse als '**Schlüsse vom Allgemeine auf das Besondere**' und induktive Schlüsse als '**Schlüsse vom Besonderen auf das Allgemeine**' charakterisiert hat; mit 'Besonderem' meint man dabei Aussagen über Einzelnes (etwa King Henry V.), mit 'Allgemeinem' Aussagen über eine Klasse von Gegensänden ('all kings'). Diese Bestimmungen sind aber zur Abgrenzung nicht wirklich geeignet [66] und nur noch

[65] Eine nicht kurze, aber noch überschaubare Übersicht zu Konditionalen gibt Ernest Adams, Conditionals. *Sprachphilosophie* (edd. Marcelo Dascal et al.) (= HSK 7.2), Berlin/New York: de Gruyter, 1996, S. 1278–1291.

[66] Gegenbeispiele: 'All men must die; all kings are men; *also:* All Kings are mortal.' ist ein Syllogismus, der von Allgemeinem auf Allgemeines führt. – 'King Charles I. is mortal; King Charles II.

historisch wichtig.

Die **moderne Logik** unterscheidet üblicherweise drei Arten von Schlüssen, **deduktive**, **induktive** (im engeren Sinn) und **abduktive Schlüsse** (auch: Schlüsse auf die beste Erklärung). Diese Unterscheidung und die Begrifflichkeit geht auf den amerikanischen Pragmatisten und Logiker **Charles Sanders Peirce** zurück.[67]

Deduktive Schlüsse sind dadurch bestimmt, daß sie **wahrheitserhaltend** (**truth preserving**) sind, nicht aber gehaltserweiternd; induktive und abduktive Schlüsse dadurch, daß sie **gehaltserweiternd** (**ampliative**) sind, nicht aber wahrheitserhaltend. In dieser Bestimmung spiegeln sich die beiden **Ziele** wider, die mit Schlüssen verfolgt werden: **Gehaltserweiterung** und **Verläßlichkeit** (in Charles S. Peirce' Terminologie: *uberty* und *security*[68]). – Zwischen diesen beiden Zielen besteht ein **Zielkonflikt**: Verläßlichkeit kann man sich durch Verzicht auf Gehaltserweiterung erkaufen (Beschränkung auf gültige Argumente), und Gehaltserweiterung durch Verzicht auf Verläßlichkeit (alle Argumente gleichermaßen zulassen).

- **Inference**
  - Explicative (**Deductive**)
  - **Ampliative**
    - **Induction** (Quantitative Induction)
    - **Abduction** (Hypothesis, Retroduction, Qualitative Induction)

Abb. 10.1. Charles Peirce' Klassifikation von Argumenten. Die Übersicht stellt eine Kompilation dar (Peirce' hat seine Auffassungen immer wieder modifiziert); sie ist also historisch nicht genau.[69] [70]

is mortal; King Henry VIII. is mortal; *also:* King Robert I. is mortal' ist eine Induktion, die von Besonderem auf Besonderes führt.

[67] Erstmalig in: Charles S. Peirce, A Theory of Probable Inference, in: id., *Writings*, Vol. 4 (ed. W. Kloesel), Bloomington/Indianapolis 1989, S. 408–450.

[68] 'I think logicians should have two principal aims: 1st, to bring out the amount and kind of *security* (approach to certainty) of each kind of reasoning, and 2nd, to bring out the possible and esperable *uberty*, or value in productiveness, of each kind.' Brief an Frederic A. Woods, 1913: Charles S. Peirce, *The Essential Peirce: Selected Philosophical Writings, Vol. I (1867–1893)* (edd. Nathan Houser, Christian Kloesel), Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press, 1992, 553 n. 7 (= CP 8.384); Hervorhebungen im Original. Vgl. id., An Essay toward Improving Our Reasoning in Security and Uberty [1913], in: Charles S. Peirce, *The Essential Peirce: Selected Philosophical Writings, Vol. II (1893–1913)* (ed. Peirce Editions Project), Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press, 1998, S. 463–474. (*Uberty* (von frz. *uberté*): Rich growth, fruitfulness, fertility; copiousness, abundance, so OED online [2.5.2015]).

[69] In seiner frühen Phase unterscheidet Peirce zwischen Induction und Hypothesis (Abduction) als verschiedenen Formen von Schlüssen; später zwischen den drei Formen der Induktion (wobei Crude Induction wenig Bedeutung zukomme), während er die drei Arten – Abduction, Deduction, Induction – als drei *Phasen* des wissenschaftlichen Forschens auffaßt.

[70] Die moderne Notation in der Logik geht übrigens auch auf ihn zurück ('$\prod_x(\mathrm{ball}_x \prec \mathrm{red}_x)$', heute '$\forall x(Bx \to Rx)$'; Freges Notation ist (zurecht) ungebräuchlich).

Peirce hat die Dreiteilung ausgehend von den Möglichkeiten aufgestellt, die Aussagen eines Syllogismus' umzustellen; das folgende ist eine eher historische Anmerkung (Syllogismen sind ja wie gesagt nur ein Spezialfall von Schlüssen), aber veranschaulichen den Grundgedanken der Unterscheidung:

(i) Peirce' Begriff der **Deduktionen** umfaßt gerade die gültigen Schlüsse: Syllogismen, aussagenlogisch gültige Folgerungen, aber auch statistische Deduktionen ('Wenn dieser Würfel fair ist, ist die Chance, eine Sechs zu würfeln, $\frac{1}{6}$').

Rule. – All the beans from this bag are white.
Case. – These beans are from this bag.
———————————————
Result. – These beans are white.

Bespiele für deduktive Schlüsse finden sich in der formalen Logik und bes. auch in der **Mathematik**.

(ii) Peirce' Paradigma für **Induktionen** sind Schlüsse von einzelnen Instanzen auf eine allgemeine Regel: [71]

Case. – These beans are from this bag.
Result. – These beans are white.
———————————————
Rule. – All the beans from this bag are white.

Standardfälle für Induktionen in diesem Sinn sind z. B. Schlüsse aufgrund von **Stichprobenentnahmen** (etwa bei Wahlumfragen, bei der Qualitätskontrolle in der Industrie usw.).

(iii) Die zweite Art von gehaltserweiternden Schlüssen bezeichnet Peirce als **Abduktionen** [72]. Eine klassische frühe Formulierung, die die Verbindungen zu Induktion und Deduktion betont, ist folgende:

Rule. – All the beans from this bag are white.
Result. – These beans are white.
———————————————
Case. – These beans are from this bag.

Abduktionen waren für Peirce nicht gedacht als Schlüsse darauf, daß die Konklusion wahr ist, sondern eher, daß sie wahr sein könnte (eine 'mögliche Erklärung', nicht unbedingt 'die beste'). Heutzutage wird der Begriff 'Abduktion' oft synonym mit **Schluß auf die beste Erklärung** (inference to the best explanation) gebraucht (nicht unbedingt im Peirceschen Sinn).

[71] Charles Peirce, Deduction, Induction, and Hypothesis. *Popular Scientific Monthly* 1878 (= *The Essential Peirce: Selected Philosophical Writings, Vol. I (1867–1893)* (edd. Nathan Houser, Christian Kloesel), Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press, 1992, S. 188). Ein späterer Ansatz findet sich in: A Neglected Argument for the Reality of God, 1908 (= *The Essential Peirce: Selected Philosophical Writings, Vol. II (1893–1913)* (ed. Peirce Editions Project), Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press, 1998, S. 434 ff.; bes. S. 440–445).

[72] In diesem Sinn erst bei Peirce; vgl. OED Online s.v. 3b [2.5.2015].

Abduktion (im modernen Sinn) bzw. Schlüsse auf die beste Erklärung sind viele Formen **wissenschaftlicher Schlüsse**, z. B.: Die Kontinentaldrifttheorie ist vermutlich wahr, weil sie gut erklärt (und besser als andere Theorien erklärt), warum sich die Küsten Afrikas und Südamerikas so sehr gleichen, warum beiderseits des Atlantiks die Gesteinsschichtungen so oft übereinstimmen, warum man Kohle in der Antarktis findet usw.

Historische Bemerkung: Eine spätere klassische Formulierung [73] zeigt Peirce' Weiterentwicklung der Abduktion und die Ablösung vom Syllogismen-Schema:

The surprising fact, C, is observed;
But if A were true, C would be a matter of course.

Hence, there is reason to suspect that A is true.

Die Beschreibung und Analyse gehaltserweiternder Schlüsse ist immer noch Gegenstand andauernder Forschung, u.a. auch die Frage, wie (ob) diese sich formallogisch behandeln lassen.

[73] Charles S. Peirce, Pragmatism as the Logic of Abduction (= 7th Harvard lecture) 1903, in: id., *The Essential Peirce: Selected Philosophical Writings, Vol. II (1893–1913)* (ed. Peirce Editions Project), Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press, 1998, , S. 226–241, hier S. 231 (CP 5.189).

10. Logische Analyse und Rekonstruktion

10.1. Die logische und sprachliche Form von Aussagen
10.2. Vorannahmen
10.3. Negation
10.4. Konjunktion
10.5. Exkurs: Bertrand Russell *On Denoting*
10.6. Adjunktion
10.7. Bisubjunktion
10.8. Subjunktion

10.1. Die logische und sprachliche Form von Aussagen

Wir betrachten in diesem Kapitel das Verhältnis von natürlichen und formalen Sprachen. Als '**natürliche Sprachen**' bezeichnen wir Sprache wie das Deutsche, Englische usw., in denen Aussagen formuliert werden und in denen argumentiert wird; eine **formale Sprache** hingegen ist die AL, deren 'Sätze' nur Aussagen-Schemata (Aussagen-Formen) sind, die erst interpretiert werden müssen müssen.

Um die Ausführungen einfach und eindeutig zu halten, werden wir statt von a.l. Sätzen in diesem Kapitel auch von a.l. **Formeln** sprechen, um Verwechslungen mit Sätzen natürlicher Sprachen zu vermeiden.

Beziehungen zwischen natürlichen und formalen Sprachen sind einmal bei der Analyse von Argumenten aufgetreten (von den gültigen Argumenten haben wir bestimmte formal gültige betrachtet, und Aussagen durch Platzhalter ersetzt), dann beider Interpretation der Elementarsätze der AL. Der Begriff der **Übersetzung** ist vielleicht glücklicher als die (ebenfalls gebräuchlichen) Ausdrücke 'Formalisierung' bzw. 'Verbalisierung' [74] – die Beziehungen zwischen logischen und natürlichen Sprachen sind kaum in strenge Regeln zu fassen, und ihre Behandlung erfordert oft ein gewisses Sprachgefühl.

Die **logische** und die **sprachliche Form** [75] von Aussagen folgen eigenen Regeln, und

[74] Als 'Formalisierung' bezeichnet man oft die Übersetzung in eine formale Sprache, als 'Verbalisierung' eine Übersetzung in eine natürliche Sprache.

[75] Wir bevorzugen hier die Bezeichnung 'sprachliche Form' gegenüber der geläufigeren Bezeich-

die Beziehungen sind in keine Richtung eindeutig: Die Sätze

Brutus tötete Caesar.

Caesar wurde von Brutus getötet.

drücken dieselbe Aussage aus (mit denselben Wahrheitsbedingungen). Umgekehrt kann man wie gesagt einem Satz verschiedene a.l. Formen zuordnen, z. B.

If Bacon wrote *Hamlet*, Bacon was a great writer.

sowohl als

$A \supset B$

auffassen wie auch einfach als

A.

Es gibt ja nicht die eine logische Form einer Aussage.

Einige Bemerkungen zu den **Problemen von Übersetzungen**:[76]

1. Die sprachlichen Ausdrücke, an die man als erste als Korrelate der Junktoren '$\neg$', '$\wedge$', '$\supset$ usw. denken könnte, nämlich 'nicht', 'und', 'wenn … dann …' usw., fungieren selten als (rein) wahrheitsfunktionale Aussageverknüpfungen.

2. Daß wir in der AL von wahrheitsfunktionalen '**Sätzen**' (Aussageformen) sprechen, verleitet zu der Annahme, als Korrelate zusammengesetzter Sätze (Formeln) komplizierte Satzperioden zu suchen, also etwa nach Hauptsatz-Nebensatz-Konstruktionen, nach durch mit 'und' verbundenen Hauptsätzen, nach Konditionalsätzen ('Wenn … dann …') usw.[77] Dazu besteht kein Anlaß – ein wahrheitsfunktional zusammengesetzter Satz im Sinne der AL ist nur im logischen Sinn ein Satz; sprachlich können ihm durchaus mehrere Sätze entsprechen. Eine Subjunktion '$A \supset B$' *kann* (mit Einschränkungen, s. u.) durch einen Konditionalsatz ausgedrückt werden:

If Bacon wrote *Hamlet*, then Bacon was a great writer.

Sprachlich kann die Subjunktion aber auch ganz anders ausgedrückt werden, und sprachliche und logische Sätze müssen nicht übereinstimmen:

nung 'grammatische Form', da die Grammatik nur Teilaspekt ist: Zwar drücken die grammatisch unterschiedlichen Sätze 'Brutus tötete Caesar' und 'Caesar wurde von Brutus getötet' die selbe Aussage aus, aber die Sprachen haben viel mehr Eigenheiten, die berücksichtigt werden müssen.

[76] Der Ansatz beim Folgenden weicht von dem üblichen ab; genauer, er geht über diese hinaus: üblicherweise finden sich in Logik-Einführungen entweder keine Anmerkungen zur Übersetzung, oder diese beschränken sich auf Erläuterungen im Kontext der Einführung der Junktoren, bes. der Subjunktion (s. u.). Ohne weitere Anmerkungen: Oberschelp, 43–46; Mit Anmerkungen zu den Junktoren: Hoyningen, 43–57; mit weitergehenden Erläuterungen: Beckermann, 43–50; 132–171; sehr ausführlich: Lepore, passim.

[77] Die meisten Logik-Bücher, die die Frage der 'Formalisierung behandeln, untersuchen ausschließlich die Beziehung zwischen sprachlichen und logischen zusammengesetzten *Sätzen*.

According to a view popular in early twentieth century, it was Francis Bacon who wrote the plays commonly attributed to Shakespeare, most notably *Hamlet*. This would mean that Bacon was a writer of considerable talent.

3. Betrachtet man Argumente, werden die Unterschiede noch offenkundiger:

According to a view popular in early twentieth century, it was Francis Bacon who wrote the plays commonly attributed to Shakespeare, most notably *Hamlet*. This would mean that Bacon was a writer of considerable talent; but as the *Novum Organum* proves, Bacon was a poor writer.

Dies ließe sich rekonstruieren (wobei wir nicht alles wiedergeben) als ein Argument der Form

$A \supset B, \neg B \models \neg A$

mit den Interpretationen

$\mathcal{J}(A) \approx$ Bacon wrote *Hamlet* [...],

$\mathcal{J}(B) \approx$ Bacon was a great writer;

das aber in der Form nicht unserer formalen Sprache AL entspricht: Die Subjunktion ist auf zwei Sätze verteilt; ihre Verbindung ist nicht durch ein 'wenn ... dann ...' ausgedrückt (und schon gar nicht durch ein 'nicht ... oder ...'); das Konsequens steht in einem Satzgefüge mit der zweiten Prämisse ('$\neg B$'), und die Konklusion ('$\neg A$') ist gar nicht ausgedrückt, sondern nur impliziert. Es gibt weitere Schwierigkeiten.[78] Manchmal muß man sich also bei Übersetzungen große Freiheiten nehmen.

Ein wesentliches Ziel einer **logischen Analyse von Aussagen**[79] ist es, Klarheit über die Wahrheitsbedingungen eines Satzes zu erreichen; wesentliches Ziel einer **logischen Rekonstruktion von Argumenten** ist es, Klarheit über die logischen Zusammenhänge zwischen den Aussagen des Arguments zu erhalten. Merkmal einer **adäquaten Übersetzung** ist daher, daß die **Wahrheitsbedingungen** übereinstimmen – oder, wo dies nicht möglich ist, die Unterschiede zwischen den Wahrheitsbedingungen explizit gemacht werden.

10.2. Vorannahmen

Erinnern wir uns an die Idealisierungen und Vorannahmen über Folgerungen und Aussagen, die wir auf dem Weg zur Entwicklung der AL gemacht haben:

[78] So ist der Behauptungssatz 'Bacon was a great writer' eine vage Aussage (wie 'great' genau?); die Aussage 'Bacon was a poor writer' wiederum ist nicht die Negation – ein kontradiktorischer Gegensatz – davon, sondern ein konträrer Gegensatz (und ebenfalls vage), der aber den kontradiktorischen Gegensatz impliziert. Meist sind Aussageverknüpfungen nicht wahrheitsfunktional; oft fehlen auch Prämissen in Argumenten usw.

[79] Der Ausdruck 'logische Analyse' wird hier in einem weiten Sinn verwendet; in einem engeren bezeichnet er ein bestimmtes philosophisches Programm.

(i) Wir haben **nur die logische Folgerung** betrachtet, und alle Argumente unbeachtet gelassen, die ihre Konklusion plausibel machen, nicht aber deduktiv gültig sind (induktive und abduktive Folgerungen). Die Folgerung

> Am Tatort wurden Luckies gefunden. Der tatverdächtige Herr X. raucht Luckies. Also: Herr X. hat die Tat vermutlich begangen.

ist durch eine gültige Folgerung nicht gut wiedergegeben, da kaum gemeint sein kann, daß es widersprüchlich ist, daß die Prämissen wahr, die Konklusion aber falsch ist; gemeint ist ein (vielleicht starkes) 'Indiz' oder ein 'Beleg', sicher aber kein deduktiver 'Beweis'.[80] **Nicht jedes 'demnach', 'also', 'folglich' drückt eine *gültige* Folgerung aus.**

(ii) Von den deduktiv gültigen Argumenten haben wir nur die **nur die *formal* gültigen** betrachtet, und von diesen bislang nur die **aussagenlogisch gültigen** (nur eine spezielle Form). Die Folgerung

> Abraham ist der Vater von Issak. Also: Abraham und Isaak sind verwandt.

läßt sich also ebenfalls nicht in AL übersetzen.

(iii) Aussagen sind **wahrheitsdefinit**, also entweder wahr oder falsch. Dies implizierte den Satz von Widerspruch ('$\models \neg(A \wedge \neg A)$'), der wenig problematisch war, aber auch das tertium non datur, und dies **schloß vage Aussagen** aus. Die Behauptungssätze

> Heinrich VIII. war dick. – Weihnachten 2015 wird in Bielefeld warm.

lassen sich also nicht ohne Probleme in die AL übersetzen.

Daß ein einzelner Satz wahrheitsdefinit war, schloß zudem (möglicherweise) **Aussagen über zukünftige Ereignisse** aus, die noch nicht wahr oder falsch sind (wenngleich 'wahr-oder-falsch').

(iv) Ungeklärt war, was **Aussagen** genau sind: nicht Äußerungen, nicht Aussagesätze (schon gar nicht im grammatischen Sinn, auch Fragesätze können Aussagen zum Ausdruck bringen), nicht Urteilsakte oder Urteile (nicht greifbar); man behilft sich damit, von 'Aussagen' i.S.v. Propositionen zu sprechen, aber dies schiebt die Fragen nur beiseite.

Für die Übersetzung ist dies insofern von Bedeutung, als daß man beim Übersetzen nicht Aussagen/Propositionen vorfindet, sondern Äußerungen oder 'Texte', die immer einen Kontext haben und im Kontext interpretiert werden sollten. Es kann erstens vorkommen, daß verschiedene Äußerungen/Texte die selbe Aussage/Proposition ausdrücken (verschiedene sprachliche Form – gleiche Aussage); ebenso kann der selbe sprachliche Ausdruck je nach Kontext verschiedene Aussagen zum Ausdruck bringen.

[80] Dies gilt, obwohl in der Konklusion ein 'vermutlich' steht – auch mit dieser Einschränkung ist die Folgerung nicht gültig.

(v) Schließlich haben wir vorausgesetzt, daß die a.l. Aussageverknüpfungen **wahrheitsfunktional** sind, d. h. der Wahrheitswert eines zusammengesetzten Satzes hängt nur von den Wahrheitswerten der Teilsätze ab und von nichts sonst. Inwieweit dies angenommen werden kann, werden wir im Folgenden betrachten.

Wir werden hier v. a. den letzten Punkt untersuchen, inwieweit unsere 'Lesart' der Junktoren (nicht, und, oder, wenn … dann, genau dann … wenn) mit dem Gebrauch dieser Ausdrücke im Deutschen übereinstimmt. Das Resultat wird sein, daß diese 'Lesarten' durchaus nicht unproblematisch sind – zum einen, weil die entsprechenden deutschen Ausdrücke nicht oder nicht nur wahrheitsfunktionale Bedeutungen haben, zum anderen, weil die wahrheitsfunktionalen Bedeutungen der Junktoren oft nicht exakt das treffen, was man ausdrücken möchte (Beispiel: Paradoxien der Implikation).

10.3. Negation

Die Lesart der wahrheitsfunktionalen Negation '¬' ist: 'Es ist nicht der Fall, daß …'. Der Sinn dieser Lesart ist, daß sie die sprachliche Form ist, die der wahrheitsfunktionalen Negation am nächsten kommt; sie macht die Wahrheitsbedingungen klar, und hat auch den Vorzug, nur auf Aussagen anwendbar zu sein (und nicht etwa auf Satzbestandteile). Bei sprachlichen Verneinungen muß man zu beachten, daß Verneinungen nicht immer einen kontradiktorischen Gegensatz ausdrücken.

Die Formulierung 'Es ist nicht der Fall, daß …' werden Sie selten in Texten finden, und auch selten selbst schreiben. Die Aussage

(a) Bacon was great writer.

kann auf vielfältige Weise verneint werden (nur einige Möglichkeiten):

(b) It is not the case that Bacon was great writer.

(c) Bacon wasn't a great writer.

(d) Bacon was *not* a great writer.

(e) Bacon was a poor writer.

(f) Bacon was a minor writer.

(g) One wouldn't call Bacon a great writer.

(h) It is not Bacon who was a great writer.

Formulierung (b) ist unsere Standardnegation, ist aber sprachlich etwas ungewöhnlich (sehr explizit); Formulierung (c) stimmt mit (b) in den Wahrheitsbedingungen gut überein, klingt aber flüssiger. Formulierung (d) ist schriftsprachlich oft synonym mit (c), betont aber das 'not' deutlich, und könnte nahelegen, daß Bacon nicht nur nicht

herausragend, sondern vielleicht nicht einmal passabel ist (Vagheit!).

Bei Formulierung (e) beginnen echte Schwierigkeiten: 'poor' ist ein Antonym (Gegensatzwort) zu 'great', und bringt hier zum Ausdruck, daß Bacon als Schriftsteller eben nicht nur 'not great', sondern armselig gewesen sei. Antonyme stehen in einem Negationsverhältnis, das andere Wahrheitsbedingungen hat als die logische Negation: (b) und (e) *können nicht beide wahr sein, aber sie können beide falsch sein* – nämlich dann, wenn Bacon ein passabler Schriftsteller war, aber eben weder großartig noch armselig. Diese Art der Negation nennt man **konträren Gegensatz**, in Abgrenzung zur aussagenlogischen Negation, die einen sog. **kontradiktorischen Gegensatz** ausdrückt.

Formulierung (f): Antonyme sind nicht immer eindeutig: Der konträre Gegensatz von 'warm' ist 'cold', aber zu 'great (writer)' könnte der Gegensatz sowohl 'poor (writer)' ('lausiger Schriftsteller') als auch 'minor (writer)' ('unbedeutender Schriftsteller') sein. Mit Verneinungen durch Antonyme wird die Bedeutung von 'great' spezifiziert.

Formulierung (g) ist eine sprachliche Variante von (b), die aber strenggenommen andere Wahrheitsbedingungen hätte, wenn man sie wörtlich auffaßt. (Bei der Interpretation von Argumenten muß man bei sprachlichen Varianten oft den gesunden Menschenverstand nutzen. Für das eigene Schreiben empfiehlt sich oft, den Ausdruck einfach zu halten: Will man sagen, daß Bacon kein großer Schriftsteller war, empfiehlt sich die Formulierung: 'Bacon wasn't a great writer.')

Formulierung (h) schließlich hat *teilweise* die gleichen Wahrheitsbedingungen wie (b): beide sind falsch, wenn Bacon ein großer Schriftsteller war. Sie sagt aber mehr aus, daß es nämlich jemanden anders gibt, der oder die ein großer Schriftsteller war. (Wären also alle Menschen großartige Schriftsteller, wäre die Formulierung (h) falsch oder wenigstens unpassend.) Normalsprachliche Negationen beziehen sich oft auf Aussageteile (hier: Bacon); man nennt dies den Skopus (Anwendungsbereich) der Negation.

Weitere sprachliche Möglichkeiten der Verneinung (teils wahrheitsfunktional, teils nicht) umfassen Negations-Präfixe (un-bekannt, un-gültig, a-septisch; Engl. im-mortal, im-possible, in-secure, un-conscious, dis-honest usw.; oft handelt es sich um Antonyme (konträre Gegensätze: 'heiß' – 'kalt'), die sich auf Aussagenteile beziehen), aber auch (Indefinit-)Pronomen (kein, niemand) usw.

Einzelsprachlich und rhetorisch haben Negationen oft weitere Eigenschaften, die sich mit der wahrheitsfunktionalen Wiedergabe nicht vertragen: **doppelte Verneinungen** dienen etwa im Englischen auch zur Betonung/Verstärkung, nicht zur Aufhebung einer Negation (gegen duplex negatio affirmat; schriftsprachlich seltener):

> We don't need no thought control. – I can't get no satisfaction. – I shot the sheriff, but I didn't shoot no deputy.[81]

[81] Pink Floyd, Another Brick in the Wall. *The Wall*, 1979; The Rolling Stones, *(I Can't Get No)*

Verneinungen können auch – etwa bei einer Litotes [82] – die Form eines kontradiktorischen Gegensatzes haben, aber einen konträren ausdrücken:

Her Majesty was not amused.

10.4. Konjunktion

Daß man '$\wedge$' als 'und' sprechen kann, bedeutet nicht, daß beide Ausdrücke direkt ineinander übersetzbar wären.

(i) Drückt das 'und' eine a.l. Konjunktion aus? In vielen Fällen **verbindet 'und' nicht Sätze, sondern Satzteile**, z. B.

This was mean and uncalled for! Das war gemein und unnötig!

Solche Sätze lassen sich oft als a.l. Konjunktion wiedergeben:

This was mean and [this was] uncalled for!

Dies gilt aber nicht immer: 'Hansel and Gretel are siblings' läßt sich nicht als Konjunktion interpretieren.

(ii) In anderen Fällen **verbindet 'und' Sätze**; hier kann es (muß aber nicht) mit der a.l. Konjunktion übereinstimmen (s. o., 4.6). Oft drückt ein 'und' zwischen Sätzen aber eine bestimmte (engere) Verbindung aus, etwa eine zeitliche Abfolge oder einen Kausalzusammenhang:

(a) Man heiratete, und Emma wurde schwanger.

legt eine andere Deutung nahe als

(b) Emma wurde schwanger, und man heiratete.

Beide Sätze, (a) und (b), haben **teilweise übereinstimmende Wahrheitsbedingungen** (Emma wurde schwanger; man heiratete), aber zumal die Formulierung (b) scheint mehr auszusagen als das (etwa: 'Emma wurde schwanger, und so heiratete man'). [83] Die Übersetzung gibt also notwendige Bedingungen für die Wahrheit des Satzes, nicht aber hinreichende.

Ein guter Test ist die **Umstellprobe**: Wenn eine a.l. Konjunktion passend ist, sollte sich die Bedeutung der Sätze 'A und B' und 'B und A' nicht unterscheiden (wegen

Satisfaction (Single), 1965; Bob Marley, I Shot the Sheriff. *The Wailers, Burnin'*, 1973.

[82] 'Litotes' (gr. λιτότης: Zurückhaltung) ist eine Stilfigur, bei der durch Verneinung eine Aussage zurückhaltend ausgedrückt wird ('Untertreibung').

[83] Daß Verbindungen mit 'und' oft eine Reihenfolge oder einen Kausalzusammenhang nahelegen, zeigt sich in Stilfiguren, etwa dem Hysteron proteron: 'Ihr Mann ist tot und läßt Sie grüßen', so Mephisto im *Faust* zu Marthe (J. W. v. Goethe, Faust, Teil I, Kap. 13; für Marthe ist dies ein Hysteron proteron, aus Mephistos Sicht stimmt die Reihenfolge freilich).

der Kommutativität '$A \wedge B \iff B \wedge A$').

(iii) Oft lassen sich unverbundene (mehrere) Sätze als (eine) a.l. Konjunktion wiedergeben:

> Vorstag und Achterstag halten den Mast vom Bug und Heck aus. Seitlich wird der Mast durch Wanten gehalten.

(iv) Satzverbindungen mit 'aber', 'obwohl', 'dennoch' usw. haben oft ähnliche Wahrheitsbedingungen wie Satzverbindungen mit 'und': Der Satz

> Leonidas verteidigte die Thermopylen, obwohl er in der Unterzahl war.

ist nur wahr (notwendige Bedingung), wenn Leonidas die Thermopylen verteidigte, und wenn Leonidas in der Unterzahl wahr (Wahrheitsbedingungen). Aber wiederum hat der Satz mehr Gehalt: der durch 'obwohl' ausgedrückte Gegensatz legt etwa nahe, daß Leonidas wußte, daß er in der Unterzahl war, und sich dennoch zur Verteidigung entschloß.[84] Viele solcher Satzverbindungen haben also die a.l. Form '$A \wedge B \wedge x$' – wenn A oder B falsch sind, sind sie auch falsch, aber nicht immer wahr, wenn A und B wahr sind.

10.5. Exkurs: Bertrand Russell *On Denoting*

Man könnte auch auf die Idee kommen, scheinbar einfache Sätze als Konjunktionen wiederzugeben. Ein berühmtes Beispiel: Bertrand Russell hat in einem klassischen Aufsatz mit dem Titel *On Denoting* (1905) den folgenden Satz logisch untersucht:

> (a) Scott was the author of *Waverley*.

Russell interessierte sich für die logische Struktur von Aussagen der Art 'Der x ist F' (sog. denoting phrases oder Kennzeichnungen; die Betonung liegt auf dem 'Der …'). Russell zufolge ist der Satz (a) eine a.l. **Konjunktion** von drei Aussagen, nämlich:

> (b) Es gibt jemanden, der *Waverley* geschrieben hat (Existenz-Aussage);
>
> (c) es gibt nur eine Person, die *Waverley* geschrieben hat (Einzigkeits-Aussage);
>
> (d) diese Person ist Scott (Identitäts-Aussage).

Die logische Form von 'a' ist also Russell zufolge '$B \wedge C \wedge D$' (mit den Interpretationen $\mathcal{J}(B) = \text{b}$ usw.).[85] Die Aussage 'a' ist genau dann wahr, wenn die Konjunktion der

[84] Hätte Leonidas die Schlacht bei den Thermopylen gewonnen, böte sich noch eine weitere Interpretation an: 'verteidigen' könnte auch 'erfolgreich verteidigen' meinen: 'Leonidas verteidigte [erfolgreich] die Thermopylen, obwohl er in der Unterzahl war'. Der durch 'obwohl' ausgedrückte Gegensatz bestünde dann objektiv.

[85] In Russells Worten (die Formulierung setzt aber Prädikatenlogik voraus: 'The shortest statement of 'Scott was the author of *Waverley*' seems to be: 'Scott wrote *Waverley*; and it is always true of y that if y wrote *Waverley*, y is identical with Scott'. (Bertrand Russell, On Denoting. *Mind* N.S. 14 (56), 1905, S. 492.

drei Aussagen ‘b’, ‘c’ und ‘d’ wahr ist.[86]

Dies löst für Russell einige sprachphilosophische Probleme, die wir hier nicht verfolgen; festhalten wollen wir nur, die sog. ‘grammatische Form’ eines Satzes nicht unbedingt mit der logischen Form übereinstimmen muß.

10.6. Adjunktion

Zur Adjunktion ist das wesentliche in 5.7 schon gesagt: Der Junktor ‘$\vee$’ wird ‘oder’ gelesen, und achten muß man allein darauf, daß ‘oder’ doppeldeutig ist und neben der Adjunktion (dem ‘**einschließenden Oder**’) auch das ‘**ausschließende Oder**’ ausdrücken kann:

Geld oder Leben! [87]

Gemeint ist hier natürlich ‘genau eins von beiden’ (die sog. Kontravalenz, bisweilen auch verwirrend [88] Disjunktion; Symbol (es gibt mehrere): ‘$\succ\!\prec$’). Das ausschließende Oder hat die folgende Wahrheitstafel:

A	B	$A \succ\!\prec B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Es gilt (bitte prüfen Sie dies):

$$A \equiv B \iff \neg(A \succ\!\prec B).$$

Ob mit einem ‘oder’ das einschließende Oder oder das ausschließende Oder gemeint ist, muß man durch Kontext, Sprachgefühl und gesunden Menschenverstand entscheiden.

10.7. Bisubjunktion

Die Bisubjunktion ist genau wie die Adjunktion zunächst wenig problematisch: Man liest ‘$\equiv$’ als ‘… genau dann, wenn …’ oder ‘… dann und nur dann, wenn …’, und in diesem Sprachgebrauch zeigt sich schon eine fachsprachliche Präzision – in der Alltagssprache tauchen diese Formulierungen kaum auf. Das englische Pendant ist ‘if and only if’, kurz ‘**iff**’; auch dies sind technische Ausdrücke. In der Philosophie und

[86] Man könnte noch hinzufügen, das ‘was’ drücke aus, daß der Autor nicht mehr lebt. (Dann ist der Satz zudem indexikalisch, d. h. ob er wahr ist, hängt vom Zeitpunkt der Äußerung ab.)

[87] Der Satz ist eine sog. Ellipse, d. h. ein (hier situationsbedingt) verkürzter Satz; gemeint ist natürlich: ‘Entweder, Sie geben uns Ihr Geld, oder Sie verlieren ihr Leben.’

[88] Verwirrend, insofern ‘Disjunktion’ oft das selbe meint wie ‘Adjunktion’.

vielen anderen Wissenschaften sind diese Ausdrücke durchaus gebräuchlich, und Sie sollten sie verwenden.

Damit stellt sich nur die Frage, wie die Bisubjunktion sprachlich überlicherweise ausgedrückt wird, wenn die technischen Ausdrücke nicht verwendet werden. Hier wird es dann doch wieder interessant:

(i) Wenn es auf Präzision ankommt, wird die Bisubjunktion oft ein '**es sei denn**' oder durch **Klarstellungen** ausgedrückt:

Ich stehe nicht auf, es sei denn, es ist nötig.

Wenn es nötig ist, stehe ich halt auf, *sonst* [wenn es nicht nötig ist] *bleibe ich liegen.*

Wenn Klitschko gewinnt, verliert Fury, *und umgekehrt.*

(ii) Oft steht aber auch ein normaler Konditionalsatz, und es ergibt sich **nur aus dem Kontext, daß eine Bisubjunktion gemeint ist**:

Wenn es nötig ist, stehe ich halt auf.

Wenn Sie hart arbeiten, können Sie bestehen.

Hier sagt einem wiederum nur Kontext, Sprachgefühl und gesunder Menschenverstand, daß gemeint ist: 'Wenn es nicht nötig ist, bleibe ich liegen', bzw. 'Wenn Sie nicht hart arbeiten, werden Sie nicht bestehen'.

Hier zeigt sich sprachlich der Zusammenhang von (Bi)Subjunktion und (ausschließendem) Oder:

$$A \equiv B \iff \neg(A \succ\!\prec B) \iff (\neg A \succ\!\prec B),$$ [89]

die beide wie Subjunktion bzw. einschließendes Oder daherkommen können:

Wenn Sie hart arbeiten, können Sie bestehen (… wenn nicht, dann nicht);

Sie können faul sein [nicht hart arbeiten], oder Sie können bestehen (… aber nicht beides).

Beide Sätze haben als sog. '**Implikatur**' ('implicature'), daß man nicht besteht, wenn man nicht hat arbeitet, drücken dies aber eigentlich nicht ausdrücklich aus – nur würde man diese Sätze nicht äußern, wenn dies nicht in Hintergrund angenommen wäre.[90]

10.8. Subjunktion (materiale Implikation) und Konditionalsätze

Die Subjunktion (materiale Implikation, materiales Konditional) ist zugleich sehr

[89] Prüfen Sie die zweite Äquivalenz.

[90] Den Ausdruck 'Implikatur' hat der Sprachphilosoph Paul Grice geprägt (Paul Grice, Logic and Conversation [1975], in: id., *Studies in the Way of Words*, Harvard 1989, S. 22–40); er bezeichnet Bedeutungsaspekte, die in einer Äußerung nicht ausdrücklich ausgesprochen, aber (durch vier sog. Konversationsmaximen wie etwa der Maxim of Relevance: Sage etwas zum Thema) nahegelegt werden.

leicht und sehr schwer zu behandeln: Liest man '$A \supset B$' als 'nicht A oder B', bereitet sie keine Probleme; liest man sie als 'Wenn A, dann B', also als Konditionalsatz, viele – dies spiegelt sich in stark voneinander abweichenden Behandlungen in der Literatur nieder.[91] Nochmals: Es ist naheliegend, aber nicht notwendig, nach einer sprachlichen Entsprechung für die Subjunktion in Form eines *Satzes* zu suchen; es gibt aber weitere sprachliche Ausdrucksformen.

Wir beginnen daher mit der (Wiederholung von) **Terminologie**:

Die **Subjunktion** '$A \supset B$' ist ein zweistelliger Junktor mit bekannter Wahrheitstafel; das Vorderglied bezeichnet man als **Antezedens**, das Hinterglied als **Konsequens**.

Ein **Konditionalsatz** ist ein Satzgefüge, daß eine Beziehung zwischen zwei Aussagen ausdrückt; das Vorderglied bezeichnet man als **Protasis** oder Wenn-Satz, das Hinterglied als **Apodosis** oder Dann-Satz.

Konditionalsätze müssen nicht immer ein 'wenn' und 'dann' enthalten:

(a) … und *solang* Brutus bei dir ist, o Cäsar, hast du nichts zu befürchten.[92]

(b) … ist Brutus bei dir, o Cäsar, hast du nichts zu befürchten.

(c) … *wenn* Brutus bei dir ist, o Cäsar, *dann* hast du nichts zu befürchten.

(d) Will ich in mein Keller gehn,
Will mein Weinlein zapfen;
Steht ein bucklicht Männlein da,
Thut mir'n Krug wegschnappen.[93]

Es gibt **Unterschiede zwischen Subjunktionen und Konditionalsätzen**: Konditionalsätze behaupten einen *bestimmten Zusammenhang* zwischen Wenn-Satz und Dann-Satz, und es ist i.d.R. nicht hinreichend, die Wahrheitswerte der beiden Sätze zu kennen, um zu beurteilen, ob ein solcher Zusammenhang besteht. Wir unterscheiden (ausgehend von der Subjunktion) drei Fälle:

(i) Ist das **Antezedens einer Subjunktion falsch**, ist die Subjunktion wahr; Konditionalsätze mit falscher Protasis (Wenn-Satz) können aber falsch sein:

(e) Wenn Shakespeare die *Ilias* geschrieben hat, war Shakespeare ein großer Schriftsteller.

(f) Wenn Shakespeare die *Ilias* geschrieben hat, war Shakespeare ein lausiger Schriftsteller.

Der Wenn-Satz ist falsch, der Dann-Satz wahr bzw. falsch – aber ob der Konditionalsatz wahr oder falsch ist, ist damit nicht geklärt. Zu wissen, daß Shakespeare die *Ilias* geschrieben hat, und daß Shakespeare ein großer (lausiger) Schriftsteller war, reicht

[91] Vergleichen Sie etwa: Oberschelp, 100-110; Papineau, 8.6. und S. 140; Lepore, 79–108.
[92] Albert Uderzo, René Goscinny, *Der Seher*, Stuttgart 1975, S. 9.
[93] Das buckliche Männlein, in: Achim von Armin, Clemens Brentano (edd.), *Des Knaben Wunderhorn*, Bd. 3, Heidelberg: Mohr und Zimmer, 1808: Anhang, S. 54–55, hier: S. 55.

nicht aus, um den im Konditionalsatz behaupteten Zusammenhang zu beurteilen. Dazu muß man mehr wissen, etwa: 'Die *Ilias* ist ein großes literarisches Werk, und wer immer sie verfaßt hat, war ein großer Schriftsteller bzw. eine große Schriftstellerin'. Wenn man dies aber denkt, würde man (e) für wahr halten, (f) aber für falsch – und dies wäre *ganz unabhängig davon*, ob Shakespeare die *Ilias* geschrieben hat.

Konditionalsätze können auch explizit zum Ausdruck bringen, daß der Sprecher die Protasis für falsch hält:

> (g) … wenn Brutus bei dir wäre, o Cäsar, dann hättest du nichts zu befürchten. (Ist er aber nicht: Be afraid. Be very afraid.)

Solche irrealen Konditionalsätze wären allesamt wahr, wenn man sie als Subjunktion läse.

(ii) Ist das **Konsequens einer Subjunktion wahr**, ist die Subjunktion wahr; Konditionalsätze mit wahrem Konsequens können aber falsch sein:

> (h) Wenn Shakespeare *Landarzt Doktor Rosencrantz* geschrieben hat, war Shakespeare ein großer Schriftsteller.

Der Konditionalsatz (h) ist möglicherweise (vermutlich) falsch; aber wiederum kann dies der Fall sein, obgleich Shakespeare ein großer Schriftsteller war – relevant für die Wahrheit des Konditionalsatzes ist wiederum der behauptete Zusammenhang (der hier falsch ist, wenn man denkt, daß *Landarzt Doktor Rosencrantz* Schundliteratur sei, und wer immer dieses 'Werk' verbrochen habe, ein lausiger Schriftsteller sein müsse).

Daß im Beispiel (h) der Wenn-Satz falsch ist, ist nicht wichtig; auch Konditionalsätze mit wahrem Wenn- und wahrem Dann-Satz können falsch sein:

> (j) Wenn Shakespeare 1616 gestorben ist, war Shakespeare ein großer Schriftsteller.

Die Frage ist wohlgemerkt nicht, ob der Konditionalsatz (trotz wahrer Teilaussagen) tatsächlich falsch *ist*: Der Konditionalsatz *behauptet* nur einen inhaltlichen Zusammenhang, und hier einen unplausiblen (warum sollte, wann Shakespeare gestoben ist, dafür relevant sein, ob er ein großer Schriftsteller war?). Wichtig ist allein, daß er (trotz wahrer Teilaussagen) falsch sein *könnte*, also sein Wahrheitswert nicht allein an denen von Wenn- und Dann-Satz hängt, sondern unabhängig ist. – In vielen Fällen ist der behauptete Zusammenhang ohne weitere Kenntnis unklar (und der Wahrheitswert des Konditionalsatzes ohne weiteres Wissen nicht bestimmbar); zwei Beispiele aus der Wissenschaft:

> Wenn Sirenen von Polizeiautos höher klingen, wenn sie auf einen zufahren, als wenn sie von einem wegfahren, dehnt sich das Universum aus.[94]

[94] Googlen Sie 'Doppler-Effekt' und 'Hubblesches Gesetz'.

Wenn die Pflanze *Glossopteridalis* große Samen hat, verschieben sich die Kontinente.[95]

(iii) Angesichts all dieser Unterschiede muß man eigentlich eine andere Frage stellen: Warum kommt man überhaupt darauf, Subjunktionen mit Konditionalsätzen in Verbindung zu bringen? Es ist eigentlich nur ein Punkt, der beiden gemeinsam ist, aber ein wichtiger: Ist das **Antezedens einer Subjunktion wahr, das Konsequens aber falsch, ist die Subjunktion falsch – ebenso wie ein (jeder) Konditionalsatz, wenn der Wenn-Satz wahr, der Dann-Satz falsch ist**:

(k) Wenn Shakespeare den *Hamlet* geschrieben hat, war Shakespeare ein lausiger Schriftsteller.

Was auch immer der angenommene Zusammenhang ist, er kann nicht bestehen, wenn der Wenn-Satz wahr, der Dann-Satz falsch ist.

Ein wahrer Konditionalsatz ist ebenso wie wahre Subjunktion in einem bestimmten Sinne wahrheits-übertragend: der Wenn-Satz drückt eine **hinreichende Bedingung** für den Dann-Satz aus. (Umgekehrt ist der Dann-Satz eine **notwendige Bedingung** für den Wenn-Satz.) Dies ist die einzige Verbindung zwischen den Wahrheitsbedingungen von Subjunktionen und Konditionalsätzen.

Damit kann man hinsichtlich der **Wahrheitsbedingungen von Konditionalsätzen** eine Lehre ziehen: Ob sie wahr sind, läßt sich Anhand der Wahrheitswerte von Wenn- und Dann-Satz nicht sagen, wohl aber, daß sie falsch sind, wenn der Wenn-Satz wahr und der Dann-Satz falsch sind.

[95] Googlen Sie ‘Kontinentaldrift’ und ‘Glossopteris-Flora’.

11. Die prädikatenlogische Form

11.1. Prädikatenlogik
11.2. Syllogismen
11.3. Singuläre Aussagen: 'Bacon wrote *Hamlet*'
11.4. Allaussagen: 'All kings must die'
11.5. Existenzaussagen: 'Some books are not interesting'
11.6. Identitätsaussagen: 'Bacon was Shakespeare'
11.7. Nochmals Syllogismen
11.8. Alternative Schreibweisen

11.1. Prädikatenlogik

Die Aussagenlogik gestattet es, die formale Gültigkeit von Folgerungen zu fassen, die auf der a.l. Form beruhen – Folgerungen, die wahrheitsfunktional zusammengesetzte Aussagen als Prämissen oder Konklusion haben. Die Prädikatenlogik (kurz: PL) erweitert den Bereich gültiger Folgerungen durch eine Analyse von Aussagen selbst. Erweitern bedeutet: Die Aussagenlogik ist innerhalb der Prädikatenlogik enthalten, und a.l. gültige Folgerungen sind auch pradikatenlogisch (kurz auch: p.l.) gültig (das Umgekehrte gilt offensichtlich nicht).

Dieses Kapitel behandelt die sog. prädikatenlogische Form von Aussagen. Das Vorgehen ist weitgehend zum Vorgehen in der AL: Am Anfang steht die Analyse von Aussagen und die Bestimmung von deren p.l. Form; betrachtet wird die logische Form von vier Arten von Aussagen – singulären Aussagen, universellen (Allaussagen), partikulären (Existenzaussagen) und Identitätsaussagen. Der zweite Schritt besteht darin, eine formale Sprache zu definieren, die es erlaubt, die p.l. Form auszudrücken (folgendes Kapitel); schließlich betrachten wir semantische Eigenschaften von Sätzen dieser Sprache und semantische Beziehungen zwischen p.l. Sätzen, v. a. die Beziehung der logischen Folgerung.

Einen Teilbereich der p.l. gültigen Folgerungen bilden die sog. Syllogismen, deren Behandlung auf Aristoteles zurückgeht; diese stellen wir an den Anfang.

11.2. Syllogismen

Ein Kernstück der Logik des Aristoteles ist die Lehre der **Syllogismen** – gültiger

Schlüsse einer bestimmten Form. Bis ins 19. Jahrhundert bildeten Syllogismen den Hauptgegenstand der Logik und dienten als Paradigma gültiger Schlüsse überhaupt. Sie bilden einen Spezialfall der Prädikatenlogik, mit einem wichtigen Unterschied: die klassische Auffassung setzt voraus ('präsupponiert'), daß alle Begriffe nicht-leer sind. Die Begrifflichkeit ist i.d.R. lateinisch.

Syllogismen sind Argumente mit zwei Prämissen (propositio major und propositio minor) und einer Konklusion (conclusio). Die Aussagen (propositiones, Sg. propositio (f.)) in Syllogismen haben vier Formen; den Formen sind Kennbuchstaben zugeordnet: Aussagen sind entweder allgemein bejahend (a), partikulär bejahend (i), allgemein verneinend (e) oder partikulär verneinend (o). Die Buchstaben verweisen auf lat. **a**ff**i**rmo 'bejahen' bzw. n**e**g**o** 'verneinen'.

SaP: Alle S sind P.[96]

SiP: Einige S sind P.

SeP: SeP: Kein S ist P.

SoP: Einige S sind nicht P.

Dabei treten drei Begriffe auf: der Prädikatsbegriff P, der Subjektsbegriff S und der Mittelbegriff M; M tritt nur in den Prämissen auf. Je nachdem, an welcher Stelle die Begriffe in den Aussagen stehen, lassen sich vier sog. **Figuren** unterscheiden (hier jeweils mit allgemein bejahenden Aussagen):[97]

$$\begin{array}{cccc} MaP & PaM & MaP & PaM \\ SaM & SaM & MaS & MaS \\ \hline SaP & SaP & SaP & SaP \end{array}$$

Nach Figur und Art der drei Aussagen werden die einzelnen Argumentformen (**Modi**, Sg. Modus) unterschieden.[98] Sie tragen Merknamen, in denen die Vokale die Art der Aussagen bezeichnen.

Der **Modus Barbara** (erste Figur) etwa ist ein Syllogismus mit drei allgemein bejahenden Aussagen:

[96] Bei Syllogismen wird hier vorausgesetzt, daß es wenigstens einen Gegenstand gibt, der unter den Begriff S fällt; vgl. die vorangehende Anmerkung.

[97] Es ist richtig, daß hier in der conclusio immer SaP (in dieser Reihenfolge) steht; vier weitere Figuren mit der conclusio PaS aufzuführen, würde Dubletten erzeugen: Im ersten Fall ergäbe sich beispielsweise die (Pseudo)Figur 'MaP, SaM, also: PaS'. Diesen Modus gibt es schon: Wenn man P und S vertauscht (umbenennt), zeigt sich, daß der Modus mit dem in der vierten Spalte übereinstimmt (wobei die Prämissen vertauscht sind).

[98] Die vier Aussagearten allein legen den Modus nicht fest. Es gibt etwa vier verschiedene gültige Syllogismen mit den Aussagearten $e - i - o$: Ferio, Festino, Ferison und Fresison; die vier unterscheiden sich in der Stellung der Begriffe in den Aussagen, ihrer sog. Figur (σχήματα). Mit 4 Typen kategorischer Aussagen, 3 Aussagen im Syllogismus und 4 Figuren gibt es damit $4^4 = 256$ Modi. Die Benennungen sind nicht immer einheitlich.

All king are men.	propositio major (a)
All men must die.	propositio minor (a)
All kings must die.	conclusio (a)

Der **Modus Baroco** (dritte Figur) hat eine allgemein bejahende Aussage als erste Prämisse und jeweils eine partikulär verneinende als zweite Prämisse bzw. Konklusion:

All textbooks are books.	propositio major (a)
Some textbooks are not interesting.	propositio minor (o)
Some books are not interesting.	conclusio (o)

Es gibt eine ausgefeilte Theorie der Syllogismen. Was hier interessant ist, ist: Die beiden als Beispiel angeführten Argumente der Form Modi Barbara bzw. Baroco sind (wie kurzes Nachdenken zeigt) *gültig*, aber eben nicht aufgrund ihrer a.l. Form – wir bräuchten also eine neue ergänzende Analyse der logischen Form solcher Aussagen, um die Gültigkeit formal behandeln zu können. Anders als im Fall der AL muß die Analyse die *Struktur elementarer Aussagen* behandeln.

11.3. Singuläre Aussagen: 'Bacon wrote *Hamlet*'

Wir betrachten zunächst die Aussage

(a) Bacon wrote *Hamlet*.

Dies ist, könnte man sagen, eine **Aussage über** (Francis) Bacon; man sagt, 'Bacon' ist das **logische Subjekt** der Aussage (a). Über (oder: von) Francis Bacon wird nun ausgesagt, daß er *Hamlet* verfaßt habe – '… wrote *Hamlet*' nennt man das **logische Prädikat** der Aussage. Man sagt (eine Sprechweise): **Das logische Prädikat kommt dem logischen Subjekt zu**.

Man spricht vom 'logischen' Subjekt bzw. 'logischen' Prädikat, um diese Analyse vom 'grammatischen' Subjekt bzw. Prädikat abzugrenzen: 'Bacon' ist auch das grammatische Subjekt des Satzes, das Prädikat aber ist 'wrote' – '*Hamlet*' ist grammatisch ein Objekt, logisch hingegen (in der vorgenommenen Analyse) ist es ein Teil des logischen Prädikats.

Die logische Analyse einer singulären Aussage ist nicht eindeutig. Die Aussage (a) könnte man ja sprachlich auch anders fassen:

(b) *Hamlet* was written by Bacon.

Grammatisch ist '*Hamlet*' das Subjekt, 'was written' das Prädikat und 'by Bacon' ein (Präpositional-)Objekt. Es liegt daher nahe, '*Hamlet*' als logisches Subjekt und 'was written by Bacon' als logisches Prädikat aufzufassen, und nichts spricht dagegen;

aber man könnte eben auch sagen, (b) sei nur eine andere Formulierung von (a), und auch (b) sei daher eine Aussage über 'Bacon' (logisches Subjekt), dem das logische Prädikat '*Hamlet* was written by ...' zukomme (die Formulierung ist befremdlich, aber besagt ja dasselbe wie '... wrote *Hamlet*').

Schließlich könnte man (a) aber auch ganz anders analysieren: Man könnte auch '... wrote ...' als **zweistelliges logisches Prädikat** (**Relation**) auffassen, das aber nicht einen einzelnen Gegenstand als logisches Subjekt hat, sondern ein (geordnetes [99]) Paar von Gegenständen, nämlich '(Bacon, *Hamlet*)'. – Man spricht von einem (geordneten) 'Paar' und nicht von einer 'Menge', weil es auf die Reihenfolge der beiden Elemente ankommt: 'Bacon wrote *Hamlet*' sagt nicht dasselbe wie '*Hamlet* wrote Bacon'. Der Sprachgebrauch und die Notation schließt hier an den der Mathematik an: ein Paar (bei drei Elementen: ein Tripel, allgemein: ein n-Tupel) schreibt man mit runden Klammern, eine Menge hingegen mit geschweiften Klammern.

Diese Analyse hätte hier z. B. den Vorzug, die Beziehung zwischen den Aussagen (a) und (b) gut zum Ausdruck zu bringen: Die Aussage

Das logische Prädikat '... wrote ...' kommt dem Paar (Bacon, *Hamlet*) zu

ist genau dann wahr, wenn die folgende Aussage wahr ist:

Das logische Prädikat '... was written by ...' kommt dem Paar (*Hamlet*, Bacon) zu.

Das Gesagte läßt sich leicht auf drei-, vier- und **mehrstellige Prädikate** übertragen.

(Ein weiterer Grund für die Unterscheidung zwischen grammatischem und logischem Subjekt ist, daß es Aussagen gibt, die etwas verwirrend sind: so ist bei 'Es regnet' nicht ganz klar, was das logische Subjekt der Aussage ist; gewiß aber nicht 'es'.)

Schreibweisen. Wir schreiben als **Platzhalter** für den oder die Gegenstände des logischen Subjekts einer Aussage **Kleinbuchstaben** (nicht aber x, y oder z – die reservieren wir für andere Zwecke), als Platzhalter für logische Prädikate **Großbuchstaben**.

Die Aussage 'Das (einstellige) logische Prädikat P kommt dem logischen Subjekt a zu' geben wir kurz wieder durch:

Pa.

Bei zweistelligen Prädikaten schreiben wir analog die Aussage 'Das (zweistellige) logische Prädikat R kommt dem logischen Subjekt (a, b) zu' kurz als:

Rab.

Aussagen mit drei- und mehrstelligen Prädikaten schreiben wir analog '$Fabc$', '$Lpqrs$' usw.

[99] Von einem 'geordneten Paar' zu sprechen, ist redundant: im mathematischen Sinn ist jedes 'Paar' stets geordnet (eine geordnete Menge mit zwei Elementen).

11.4. Allaussagen: ‘All kings must die’

Was das logische Prädikat der Aussage

(c) All kings must die.

ist, kann man analog folgendermaßen bestimmen: (c) ist eine Aussage nicht über ‘alle Könige’ (zusammengenommen, auf einmal, die ‘Menge aller Könige’), sondern eine Aussage über **jeden einzelnen** König: Die Aussage ist genau dann wahr, wenn jeder einzelne König sterben muß: also Heinrich VIII. und König Hamlet und König Claudius und King Robert I. usw. Man kann die Wahrheitsbedingungen wiedergeben, indem man sagt,

(d) Für jeden einzelnen König x gilt: x muß sterben,

oder aber, was dasselbe ausdrücken sollte:

(e) Für jedes beliebige x gilt: Wenn x ein König ist, muß x sterben.

Was das logische Subjekt ist, hängt also an der Formulierung: In (d) sind es alle Könige (jeder einzelne), in (e) sind es alle Gegenstände überhaupt (Menschen, Lebewesen, Atome, gerade Zahlen, unpassende Bemerkungen, der Duft von Napalm am Morgen usw.) – alles, worüber überhaupt gesprochen und etwas ausgesagt werden kann. Das logische Subjekt ist also in einem gewissen Sinne unbestimmt. Den **Bereich** der Gegenstände, über den gesprochen wird, muß man jeweils angeben, damit eine solche Aussage eindeutig ist.

Dann kann man folgende **Schreibweise** für (d) einführen:

$\forall x\ (Sx)$. Bereich von x: alle Könige [100]

Dabei steht ‘$\forall x\ (\ldots)$’ für: ‘Für alle x (aus dem angegebenen Bereich) gilt: $(\ldots)$’, und ‘Sx’ steht für: ‘x muß sterben’. Entsprechend kann man für (e) schreiben:

$\forall x\ (Kx \supset Sx)$ Bereich von x: alle Gegenstände

Hier steht ‘Kx’ für: ‘x ist ein König’.

‘$\forall$’ nennt man **Allquantor**.[101] Zum Allquantor gehört die Angabe des Gegenstandsbereichs, über den quantifiziert wird. Die Klammern hinter dem Allquantor umschließen den sog. **Skopus** (**Geltungsbereich**) des Quantors; tritt die Quantor-Variable, hier ‘x’, im Skopus des Allquantors auf, nennt man sie durch den Allquantor **gebundene Individuenvariable**.

Anmerkung: Hier tritt eine Frage auf: Wenn es keine Könige gäbe, dann wäre der

[100] Man schreibt auch formaler: $x \in M$, wobei M die Menge der Könige bezeichnet.

[101] Der Ausdruck ‘Quantor’ ist eine Analogiebildung zum englischen ‘quantifier’, einem von C. S. Peirce geprägten Begriff; noch Hilbert und Ackermann verwenden ‘Allzeichen’ und ‘Seinszeichen’ (1949, S. 52).

Gegenstandsbereich die leere Menge und der Satz 'Jeder König muß sterben' nicht sinnvoll zu beantworten. Der Satz 'Für jeden Gegenstand gilt: Wenn er ein König ist, dann muß er sterben' hingegen wäre (wenn es überhaupt Gegenstände gibt) *wahr* – einfach, weil das Antezedens falsch ist. Damit beide Formulierungen den selben Wahrheitswert haben, behilft man sich mit einer **Konvention**: Allsätze betrachtet man als wahr, wenn der Gegenstandsbereich der Quantifikation leer ist.[102]

11.5 Existenzaussagen: 'Some books are not interesting'

Was das logische Subjekt der Aussage 'Some books are not interesting' ist, ist *nicht bestimmt*: Es ist eine Aussage nicht über ein bestimmtes Buch, auch nicht über alle, sondern über *irgendein* Buch – vielleicht auch mehrere, aber mindestens eins. (Das 'some' drückt, ebenso wie die Form des (grammatischen) Prädikats (Plural), eigentlich aus, es seien mehrere, also mindestens zwei; die Sprachkonvention unter Logikern ist hier allerdings, das 'some' als 'mindestens eins' zu interpretieren.) Die Aussage ist genau dann wahr, wenn wenigstens ein Buch uninteressant ist: *Hamlet, Prince of Denmark* oder *King Lear* oder die *Buddenbrooks* oder *Krieg und Frieden* usw. Die Wahrheitsbedingungen sind also dieselben wie die der Aussage:

(g) Für wenigstens ein Buch y gilt: y ist nicht interessant,

oder aber (wiederum gleichbedeutend):

(h) Für wenigstens einen Gegenstand y gilt: y ist ein Buch und y ist nicht interessant.

(Warum muß hier eine Konjunktion stehen und nicht, wie im Fall von Allaussagen, eine Subjunktion?) Wiederum kann man für (g) die folgende **Schreibweise** einführen:

$\exists y\ (\neg Iy)$ Bereich von y: alle Bücher

Dabei steht '$\exists y\ (\ldots)$' für: 'Für wenigstens ein y (aus dem angegebenen Bereich) gilt: $(\ldots)$', und 'Iy' steht für: 'y ist interessant'. Entsprechend kann man für (h) schreiben:

$\exists y\ (By \wedge \neg Iy)$ Bereich von y: alle Gegenstände

Hier steht 'By' für: 'y ist ein Buch'.

'$\exists$' nennt man **Existenzquantor**. Zum Existenzquantor gehört die Angabe des Gegenstandsbereichs, über den quantifiziert wird. Die Klammern hinter dem Allquantor umschließen den **Skopus** (**Geltungsbereich**) des Quantors; tritt die Quantor-Variable, hier 'y', im Skopus des Existenzquantors auf, nennt man sie durch den Existenzquantor **gebundene Individuenvariable**.

[102] Diese Konvention wird gewählt, weil es sich für mathematische Anwendungen besser eignet (im Englischen spricht man von 'vacuous truths'); die klassische Logik hingegen wählt einen anderen Weg und sagt, Allsätze setzten voraus ('präsupponieren'), daß der Gegenstandsbereich nicht leer ist; vgl. Hoyningen-Huene, 186–189. Das Problem ist allerdings nur verschoben – es wird vorausgesetzt, daß der weitere Gegenstandsbereich nicht leer ist.

11.6. Identitätsaussagen: ‘Bacon was Shakespeare’

In bestimmten Aussagen drückt das Verb ‘sein’ aus, daß zwei Gegenstände identisch sind (etwa zwei Gegenstandsplatzhalter denselben Gegenstand bezeichnen). Die Aussage

Bacon was Shakesspeare.

etwa bringt zum Ausdruck, daß die Person, die man Bacon nennt (der Staatsmann, der Autor des *Novum Organum*) dieselbe Person war, die man Shakespeare nennt (der Dichter, der Autor von *Hamlet*). Der Struktur nach ist dies eine Relation I zwischen zwei Gegenständen b und s (also ein zweistelliges Prädikat), und man könnte schreiben:

Ibs.

Man schreibt aber – aus Gewohnheit, und weil das Identitätsprädikat I im Gegensatz zu anderen Prädikatbuchstaben nicht beliebig interpretiert werden kann – stattdessen:

$b = s$.

Das Identitätsprädikat ‘=’ ermöglicht (wie wir sehen werden) es unter anderem, beliebige numerisch quantifizierte Aussagen zu analysieren (‘Shakespeare wrote 154 sonnets’). Die Analyse von Identitätsaussagen spielte in der Entwicklung der formalen Logik für Gottlob Frege eine entscheidende Rolle (der ja an der Begründung der Arithmetik, also Zahlentheorie, auf logischer Grundlage interessiert war).[103]

11.7. Nochmals Syllogismen

Wir haben jetzt eine Methode der logischen Analyse, die es erlaubt, die Aussagen in Syllogismen zu analysieren und dabei die **prädikatenlogische Form** (folgend kurz: p.l. Form) vom Inhalt zu unterscheiden. Der Argument der Form Modus Barbara etwa

All king are men.	propositio major (a)
All men must die.	propositio minor (a)
All kings must die.	conclusio (a)

können wir analysieren als

$\forall x\ (Kx \supset Mx)$	Bereich von x: alle Gegenstände
$\forall x\ (Mx \supset Dx)$	Bereich von x: alle Gegenstände
$\forall x\ (Kx \supset Dx)$.	Bereich von x: alle Gegenstände

[103] Freges Problem bestand darin zu erklären, wie Identitätsaussagen informativ sein können: Wenn man weiß, wer ‘Bacon’ ist und wer ‘Shakespeare’ ist, wie kann man dann nicht zugleich wissen, ob Bacon Shakespeare ist? Vgl. dazu etwa Mark Textor, Gottlob Frege – Das Problem der Gleichheit, in: Ansgar Beckermann, Dominik Perler (edd.), *Klassiker der Philosophie heute*, Stuttgart: Reclam, 2004, S. 561–580.

Dabei steht 'K' für '… is a king', 'M' für '… is a man' und 'D' für '… must die'. Jeder Schluß dieser Form ist gültig, unabhängig davon, wofür die Platzhalter stehen (der Interpretation der Platzhalter).

Analog gilt für Argumente der Form **Modus Baroco**:

$\forall x\ (Tx \supset Bx)$	Bereich von x: alle Gegenstände
$\exists x\ (Tx \wedge \neg Ix)$	Bereich von x: alle Gegenstände
$\exists x\ (Bx \wedge \neg Ix)$;	Bereich von x: alle Gegenstände

dabei steht 'T für '… is a textbook', 'B' für '… is a book' und 'I' für '… is interesting'. Jeder Schluß auch dieser Form ist gültig, unabhängig davon, wofür die Platzhalter stehen (der Interpretation der Platzhalter).

Syllogismen sind aber wie gesagt nur ein Sonderfall (es sind Argumente mit genau zwei Prämissen einer bestimmten Form, in denen nur einstellige Prädikate auftreten). Die p.l. Analyse von Aussagen gestattet, auch andere Arten von Argumenten zu untersuchen als Syllogismen.

11.8. Alternative Schreibweisen

Es gibt verschiedene Symbole für All- und Existenzquantor, und auch die Klammersetzung variiert:

Für $\forall x\ (Fx)$ schreibt man auch: $(x)\ (Fx)$ oder $\bigwedge x\ (Fx)$ oder $\bigwedge x\ Fx$ oder $\forall x \in \mathcal{D}\ (Fx)$.

Für $\exists x\ (Fx)$ schreibt man auch: $(Ex)\ (Fx)$ oder $\bigvee x\ (Fx)$ oder $\bigvee x\ Fx$ oder $\Sigma x\ (Fx)$ oder $\exists x \in \mathcal{D}\ (Fx)$

Für Fab schreibt man auch $F(a, b)$; teils gibt man die sog. Stelligkeit eines Prädikats als hochgestellten Index an: F^2ab.

12. Prädikatenlogische Sprachen

12.1. Die Sprachen der Prädikatenlogik
12.2. Alphabet der Sprache PL
12.3. Die logische Prädikatkonstante '='
12.4. Ausdrücke der Sprache PL
12.5. Sätze der Sprache PL
12.6. Klammer-Konventionen

12.1. Die Sprachen der Prädikatenlogik

Im folgenden definieren wir die Sprachen PL, eine Familie prädikatenlogischer Sprachen – eine Sprachfamilie, nicht die prädikatenlogische Sprache, da es gewisse Freiheiten im Detail gibt: Wir verwenden z. B. eine Sprache mit einem eigenen Identitätszeichen ('=').

Die einzelnen Schritte gleichen denen beim Aufbau der AL, mit kleinen Abweichungen: **Alphabet**: Übersicht über die Zeichen von PL. **Syntax**: zunächst Bildungsregeln für Ausdrücke (mit einem kurzen erläuternden Einschub zur 'Prädikatkonstanten ='); da aber nicht alle syntaktische wohlgeformten Ausdrücke wahrheitswertfähig sind, unterscheidet man in der PL zwischen Ausdrücken und Sätzen. **Semantik**: Wir unterscheiden wiederum intensionale und extensionale Interpretationen – in der PL spielen für uns intensionale eine größere Rolle, obwohl extensionale Interpretationen eigentlich zugleich notwendig und hinreichend sind (sie sind aber unhandlich). Am Schluß steht die Wahrheitswertanalyse für Sätze von PL.

Ein ausführliches **Beispiel** für eine Sprache und Interpretation findet sich im folgenden Kapitel; nichts spricht dagegen, bei Interesse oder Bedarf zwischen der Beschreibung von Syntax und Semantik von PL und dem Beispiel zu springen.

12.2. Alphabet der Sprachen PL

Alphabet. Die prädikatenlogischen Sprachen PL haben das folgende **Alphabet**:

1. Eine Menge von **Individuenkonstanten**, bezeichnet durch die Kleinbuchstaben a, b, …, w (nicht aber x, y und z), ggf. mit Indizes zur Unterscheidung: a_1, a_2, a_n, a_x usw.;

2. eine nichtleere Menge von **Prädikatbuchstaben** mit jeweils festgelegter Stelligkeit, bezeichnet durch die Großbuchstaben A, B, …, Z, ggf. mit Indizes zur Unterscheidung: A_1, A_2, A_n, A_x usw.; die Stelligkeit wird bei Mehrdeutigkeit durch eine hochgestellte Zahl bezeichnet (A^1, A^2 usw., $n \in \mathbb{N}$).

3. die **logische (Prädikat-)Konstante** $=$;

4. den **Allquantor** $\forall$ und den **Existenzquantor** $\exists$;

5. die **(Individuen-)Variablen** x, y, z, ggf. mit Indizes zur Unterscheidung: x_1, x_2, x_n, x_x usw.;

6. die **Junktoren** $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$ und $\equiv$;

7. paarweise auftretende **Klammern** (und) sowie [und].

Eine bestimmte Sprache (man könnte sagen: ein Dialekt) ist also v. a. durch ihre (1) Individuenkonstanten und (2) durch ihre Prädikatbuchstaben bestimmt.

12.3. Die logische Prädikatkonstante '='

Man nennt '=' auch ein Prädikat oder eine Prädikatkonstante. Zum Hintergrund: Von zwei Individuenkonstanten auszusagen, sie seien identisch, bedeutet, eine Beziehung zwischen ihnen zu behaupten, und dies tut man überlicherweise mit einem zweistelligen Prädikat. Man könnte also eigentlich '=' auch unter den Prädikatbuchstaben auflisten und statt '$a = b$' schreiben: '$=ab$' (wie 'Fab').

Anders als andere (zweistellige) Prädikate hat '=' aber besondere Eigenschaften, die unabhängig von der Interpretation (s. u.) sind (daher die Bezeichnung 'Prädikat*konstante*'): So ist etwa alles mit sich selbst identisch: $\models a = a$, und also: $\models \forall x\ (x = x)$. Dies gilt für normale zweistellige Prädikate F nicht: $\not\models \forall x\ (Fxx)$, denn für jedes solche Prädikat ließe sich eine Interpretation finden, für die die Aussage $\forall x\ (Fxx)$ falsch ist – z. B. die Interpretation 'ist nicht identisch'. Der Satz ist also nicht allgemeingültig.

Die Prädikatkonstante '=' ermöglicht zudem, alle quantitativen Aussagen zu formalisieren.

12.4. Ausdrücke der Sprachen PL

Eine Anmerkung vorweg: Wenn wir im folgenden über **beliebige Buchstaben** unseres Alphabets der selben Art (in Ausnahmefällen auch mehrerer Arten) sprechen, werden wir ein Zirkumflex (Dach) auf die Buchstaben setzen, um uns daran zu erinnern, daß diese nur paradigmatisch verwendet werden: $\hat{F}$ bspw. bezeichnet also nicht einen bestimmten Prädikatbuchstaben, sondern einen beliebigen.[104] Für **beliebige**

[104] Normalerweise verwendet man griechische Kleinbuchstaben als Metasymbole, um sich auf be-

Ausdrücke verwenden wir griechische Kleinbuchstaben (ohne Zirkumflex).

Ausdrücke. Die prädikatenlogischen Sprachen PL haben folgende vier **Bildungsregeln für Ausdrücke**:

1. Sei $\hat{F}$ ein n-stelliger Prädikatbuchstabe und seien $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n$ Individuenkonstanten oder Variablen. Dann ist $\hat{F}\hat{a}_1 ... \hat{a}_n$ ein Ausdruck in PL.

2. Sei ϕ ein Ausdruck und $\hat{x}$ eine Variable. Dann sind $\forall\hat{x}\ (\phi)$ und $\exists\hat{x}\ (\phi)$ Ausdrücke.

3. Seien $\hat{a}$ und $\hat{b}$ jeweils eine Individuenkonstante oder Variable. Dann ist $(\hat{a} = \hat{b})$ ein Ausdruck.

4. Seien ϕ und ψ Ausdrücke. Dann sind auch $\neg\phi$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \supset \psi)$ und $(\phi \equiv \psi)$ Ausdrücke.

12.5. Sätze der Sprachen PL

Nicht alle Ausdrücke von PL sind Sätze.

(a) Die Bildungsregeln für Ausdrücke erlauben es (Bildungsregel 1), aus dem Alphabet Ausdrücke zu formen, in denen Variablen auftreten, ohne sich im Skopus (Wirkungsbereich) eines Quantors zu befinden, z. B.

Fx oder $\forall x\ (Qxy)$.

Wir nennen solche Variablen **freie Variablen**, und Ausdrücke mit freien Variablen **offene Ausdrücke**; Ausdrücke, in denen alle Variablen durch Quantoren gebunden sind (nach der Bildungsregel 2), nennen wir **geschlossene Ausdrücke**. Nur geschlossene Ausdrücke bezeichnen wir als **Sätze**:

Definition. Ein Ausdruck von PL, in dem nur durch Quantoren gebundene Individuenvariablen auftreten, heißt geschlossener Ausdruck oder kurz **Satz**.

Der Grund ist, daß, wenn man die Sprache interpretiert (s. u.), offene Ausdrücke dennoch nicht wahr oder falsch wären (mit anderen Worten: keine Aussagen).

(b) Die Bildungsregeln erlauben auch (Bildungsregel 2), sog. leere Quantoren einzuführen: Quantoren mit einer Quantor-Variable, die im Ausdruck im Skopus des Quantors gar nicht vorkommt, z. B.

$\exists x\ (Qay)$.

Wir beschließen, leere Quantoren einfach zu ignorieren.[105]

liebige Buchstaben des Alphabets zu beziehen; dies liest sich aber nicht gut.

[105] Es ist also $\forall x\ (\phi)$ und $\exists x\ (\phi)$ einfach dasselbe wie ϕ, wenn in ϕ die Variable x nicht frei vorkommt; vgl. etwa Bostock, 79–80.

12.6. Klammer-Konventionen

Klammern dürfen weggelassen oder ergänzt werden, solange die Eindeutigkeit erhalten bleibt. Insbesondere dürfen

1. Außenklammern weggelassen werden;

2. Klammern um stärker bindende Junktoren weggelassen werden; Konjunktion und Adjunktion binden stärker als Subjunktion und Bisubjunktion;

3. Klammern bei Reihen von Konjunktionen bzw. von Adjunktionen oder von Bisubjunktionen weggelassen werden.

13. Semantik prädikatenlogischer Sprachen

13.1. Extension und Intension
13.2. Extensionale und intensionale Interpretationen
13.3. Wahrheitswertanalyse prädikatenlogischer Sätze

13.1. Extension und Intension

Als **Extension** eines einstelligen Prädikats bezeichnet man dessen **Begriffsumfang**: die Menge der Gegenstände, die 'unter den Begriff fallen'. Auf n-stellige Prädikate verallgemeinert bezeichnet Extension die jeweilige Menge der n-Tupel[106] von Gegenständen, auf die das Prädikat zutrifft.

Als **Intension** eines einstelligen Prädikats bezeichnet man dessen **Begriffsinhalt**: die 'Bedeutung' oder der 'Sinn' des Prädikats.[107] In einem spezifischeren Sinn bezeichnet der Ausdruck die bestimmenden (definitorischen) Merkmale der Gegenstände, die unter das Prädikat fallen. Auf n-stellige Prädikate verallgemeinert bezeichnet Intension den Sinn der Merkmale oder Beziehungen, die den Gegenständen zukommen bzw. in der die Gegenstände stehen, auf die das Prädikat zutrifft.

Beispiel. Platon bestimmte den Begriff des Menschen (das Prädikat '… ist ein Mensch') als 'zweifüßiges ungefiedertes Lebenwesen' (ἄνθρωπος ἐστὶ ζῶιον δίπουν ἄπτερον[108]), Aristoteles als 'Lebewesen, das in Poleis lebt' (ζῶιον πολιτικόν[109]). Beides sind Versuche, die Intension (die bestimmenden Merkmale) des Begriffs 'Mensch' anzugeben; die Extension des Begriffs sind alle Menschen.[110]

Beziehungen zwischen Extension und Intension. Prädikate mit gleicher Intension ('… ist schwanger'; '… erwartet ein Kind') haben immer die gleiche Extension (alle Schwangeren). Prädikate mit ungleicher Intension ('… ist der Morgenstern'; '… ist der Abendstern') können die gleiche Extension haben (Venus). Prädikate mit ungleicher Extension haben immer verschiedene Intensionen.

[106] Zur Erinnerung: n-Tupel nennt man geordnete Mengen von n Elementen.
[107] Gottlob Frege nannte abweichend von diesem Sprachgebrauch die Intension 'Sinn', die Extension hingegen 'Bedeutung'.
[108] Platon, *Pol.* **[266 e]**.
[109] Aristoteles, *Pol.* 1253 a.
[110] Platons Bestimmung ist vielleicht zu weit (auch Kängurus sind zweifüßig und ungefiedert), Aristoteles vielleicht zu eng (Eremiten möchten keine Poleis bilden).

13.2. Extensionale und intensionale Interpretationen

Eine **Interpretation** einer Sprache PL dient dazu, jedem Satz von PL eine Aussage und damit einen Wahrheitswert zuzuordnen. Man unterscheidet **extensionale Interpretationen** und **intensionale Interpretationen** nach der Art, in der die Prädikatbuchstaben interpretiert werden.

Eine **extensionale bzw. intensionale Interpretation** $\mathcal{J}$ einer Sprache besteht aus jeweils drei Angaben: [111]

1. Angabe des (nicht-leeren [112]) **Gegenstandsbereichs** $\mathcal{D}$ (engl. domain). Dieser gibt an, worüber in PL gesprochen werden kann: die natürlichen Zahlen, die Bücher im einem Regal, die Edelgase usw. Der Gegenstandsbereich ist einfach eine Menge.[113]

2. Jeder **Individuenkonstante** $\hat{a}$ von PL muß genau ein Gegenstand $|\,\hat{a}\,|_{\mathcal{J}} \in \mathcal{D}$ zugeordnet werden (nicht aber notwendig jedem Gegenstand eine Individuenkonstante).

3. Für jeden (n-stelligen) **Prädikatbuchstaben** $\hat{F}$ von PL muß seine Extension $|\,\hat{F}\,|_{\mathcal{J}} \in \mathcal{D}^n$ angegeben werden [114] **bzw.** es muß zu jedem Prädikatbuchstaben $\hat{F}$ dessen Intension angegeben werden (damit ist indirekt auch dessen Extension festgelegt).

13.3. Wahrheitswertanalyse prädikatenlogischer Sätze

Die Wahrheitswertanalyse gibt an, welcher Wahrheitswert den Sätzen von PL unter einer gegebenen Interpretation $\mathcal{J}$ zukommt. Wir behandeln nacheinander singuläre Sätze, Existenzsätze, Allsätze, Identitätssätze und schließlich zusammengesetzte Sätze.

1. Singuläre Sätze. Sei $\hat{F}$ ein beliebiger Prädikatbuchstabe und $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n$ beliebige Individuenkonstanten. Dann gilt unter der Interpretation $\mathcal{J}$:

$\hat{F}\hat{a}_1 \ldots \hat{a}_n$ ist genau dann wahr, wenn dem n-Tupel der durch die Individuenkonstanten bezeichneten Gegenstände das durch $\hat{F}$ bezeichnete Prädikat zukommt.

2. Existenzsätze. Sei $\hat{x}$ eine beliebige Variable, und $\phi(\hat{x})$ ein Ausdruck von PL, in dem $\hat{x}$ (und nur $\hat{x}$) frei vorkommt. Dann gilt unter der Interpretation $\mathcal{J}$:

$\exists\hat{x}\ \big(\phi(\hat{x})\big)$ ist genau dann wahr, wenn die durch ϕ ausgedrückte Eigenschaft wenigstens

[111] In der mathematischen Logik rechnet man die Angabe des Gegenstandsbereichs oft nicht mit zur Interpretation, und spricht von dem geordneten Paar von Gegenstandsbereich $\mathcal{D}$ und Interpretation $\mathcal{J}$ als einem Modell $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathcal{J})$.

[112] Daß hier gefordert wird, daß der Gegenstandsbereich nicht-leer ist, ist eigentlich nicht zwingend; wichtig wird es erst in der Logik der PL (s. u., Kap. 12) – dort werden wir die Forderung in Erinnerung rufen, weil dort ihr Sinn erkennbar wird.

[113] Die berühmte Bestimmung Georg Cantors lautet: 'Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer [sic] Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.' Georg Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen* 46, 1895, S. 481–512, hier S. 481.

[114] Dabei bezeichnet $\mathcal{D}^n$ die Menge der n-Tupel der Elemente der Menge $\mathcal{D}$.

einem Gegenstand des Gegenstandsbereichs von $\mathcal{J}$ zukommt.

3. Allsätze. Sei $\hat{x}$ eine beliebige Variable, und $\phi(\hat{x})$ ein Ausdruck von PL, in dem $\hat{x}$ (und nur $\hat{x}$) frei vorkommt. Dann gilt unter der Interpretation $\mathcal{J}$:

$\forall\hat{x}\ \big(\phi(\hat{x})\big)$ ist genau dann wahr, wenn die durch ϕ ausgedrückte Eigenschaft allen Gegenständen des Gegenstandsbereichs von $\mathcal{J}$ zukommt.

4. Identitätssätze. Seien $\hat{a}$ und $\hat{b}$ beliebige Individuenkonstanten oder Individuenvariablen. Dann gilt unter der Interpretation $\mathcal{J}$:

$(\hat{a} = \hat{b})$ ist wahr gdw. $\hat{a}$ und $\hat{b}$ denselben Gegenstand des Gegenstandsbereichs $\mathcal{D}$ bezeichnen.

5. Zusammengesetzte Sätze. Seien ϕ und ψ beliebige Sätze von PL. Dann gilt unter der Interpretation $\mathcal{J}$:

$\neg\phi$ ist wahr gdw. ϕ falsch ist;
$(\phi \wedge \psi)$ ist wahr gdw. ϕ und ψ wahr sind;
$(\phi \vee \psi)$ ist wahr gdw. ϕ oder ψ wahr ist;
$(\phi \supset \psi)$ ist wahr gdw. ϕ falsch oder ψ wahr ist;
$(\phi \equiv \psi)$ ist wahr gdw. ϕ und ψ beide wahr oder beide falsch sind.

14. Die Ausdrucksfähigkeit der Prädikatenlogik: ein Beispiel

14.1. Ein Beispiel: die Sprache $\mathcal{S}_{\mathbf{PL}}$
14.2. Alphabet von $\mathcal{S}_{\mathbf{PL}}$
14.3. Ausdrücke und Sätze von $\mathcal{S}_{\mathbf{PL}}$
14.4. Interpretation von $\mathcal{S}_{\mathbf{PL}}$
14.5. Komplexere Sätze und ihre Interpretation

14.1. Ein Beispiel: die Sprache $\mathcal{S}_{\mathbf{PL}}$

Wir betrachten eine Sprache $\mathcal{S}_{\mathrm{PL}}$ als Beispiel. Der **Sinn der Übung** ist erstens, die Bildung von Ausdrücken und Sätzen und die Struktur von intensionalen und extensionalen Interpretationen zu veranschaulichen. Zweitens sollen die Beispiele für Interpretationen komplexerer Sätze von $\mathcal{S}_{\mathrm{PL}}$ eine Vorstellung von der Ausdruckskraft einer p.l. Sprache geben.

14.2. Alphabet von $\mathcal{S}_{\mathbf{PL}}$

Eine bestimmte p.l. Sprache unserer Sprachfamilie ist bestimmt durch ihr Alphabet, d. h. durch ihre Individuenkonstanten und Prädikatbuchstaben (die anderen Buchstaben und Zeichen der Sprache sind allen p.l. Sprachen gemeinsam).

Das **Alphabet** von $\mathcal{S}_{\mathrm{PL}}$ umfaßt folgende Individuenkonstanten und Prädikatbuchstaben:

Individuenkonstanten: b, h, i, l, q, s.

Prädikatbuchstaben: B, G, H, K, M, U (einstellig); R, W (zweistellig); X (dreistellig).

14.3. Ausdrücke und Sätze von $\mathcal{S}_{\mathbf{PL}}$

Wohlgeformte **Ausdrücke** der Sprache $\mathcal{S}_{\mathrm{PL}}$ sind nach den Bildungsregeln (12.4) z. B. (die folgenden Ausdrücke sind alle zugleich **Sätze**):

Kb, Uh, Uq, Wsh, (nach Bildungsregel 1)

$\forall x\ (Kx)$, $\forall x\ (Kb)$, $\exists x\ (Kl)$, $\exists x\ (Wxh)$ (nach Bildungsregel 2)

$(b = s)$ (nach Bildungsregel 3)

$\neg\exists x\ (Kx \wedge Bx)$ (nach Bildungsregeln 2 und 4)

$\big(\neg(b = s) \vee Kb \vee \big(\exists x\ (Ux) \supset \forall x\ (Wsx)\big)\big)$ (nach Bildungsregeln 1–5)

Beispiele für **Ausdrücke, die keine Sätze** sind, sind z. B.:

Kx (x ungebunden)

Why (y ungebunden)

$\exists y\ (Uz)$. (z ungebunden)

Keine Ausdrücke von $\mathcal{S}_{\mathrm{PL}}$ sind hingegen:

Xsb (X ist dreistellig)

Ba (es gibt keine Individuenkonstante a in S)

$\forall x\ Kx$. (die Skopus-Klammern fehlen)

14.4. Interpretation von $\mathcal{S}_{\mathrm{PL}}$

Eine Interpretation bestimmt (i) den Gegenstandsbereich, (ii) die Extensionen der Individuenkonstanten und (iii) (wenigstens) die Extension der Prädikatbuchstaben.

Als **Gegenstandsbereich** wählen wir Gegenstände unser bisherigen Beispiele:

$\mathcal{D} = \{$Bacon, Shakespeare, *Hamlet*, King Hamlet I., King Lear, King Henry V.$\}$

Den **Individuenkonstanten** ordnen wir durch die **extensionale Interpretation** $|\ |_{\mathcal{J}}$ die folgenden Gegenstände zu:

$|b|_{\mathcal{J}} = \{$Bacon$\}$,
$|h|_{\mathcal{J}} = \{$*Hamlet*$\}$,
$|i|_{\mathcal{J}} = \{$King Hamlet I.$\}$,
$|l|_{\mathcal{J}} = \{$King Lear$\}$,
$|q|_{\mathcal{J}} = \{$Shakespeare$\}$,
$|s|_{\mathcal{J}} = \{$Shakespeare$\}$.

Für die **Prädikatbuchstaben** geben wir die folgende **intensionale Interpretation**. (Wir schreiben als Zuweisungs-Symbol für intensionale Interpretationen ‘ $=_{\mathcal{J}}$ ’; das ‘$_{\mathcal{J}}$’ soll einmal daran erinnern, daß alle Zuweisungen nur unter einer bestimmten Interpretation gelten, und zugleich erinnern, daß das Symbol nicht dasselbe ist wie die Prädikationskonstante ‘ $=$ ’: ‘ $=$ ’ ist ein Symbol der Objektsprache PL (hier $\mathcal{S}_{\mathrm{PL}}$), ‘ $=_{\mathcal{J}}$ ’ ein Symbol der Metasprache.)

$B \;=_{\mathcal{J}}$ '… is a book',

$G \;=_{\mathcal{J}}$ '… is a great writer',

$H \;=_{\mathcal{J}}$ '… wrote Hamlet',

$K \;=_{\mathcal{J}}$ '… is a king',

$M \;=_{\mathcal{J}}$ '… is a man',

$U \;=_{\mathcal{J}}$ '… is uninteresting',

$R \;=_{\mathcal{J}}$ '… read …',

$W \;=_{\mathcal{J}}$ '… wrote …',

$X \;=_{\mathcal{J}}$ '… read … and then poisoned …'.

Damit ergibt sich für die **Prädikatbuchstaben** die folgende **extensionale Interpretation** $|\;|_{\mathcal{J}}$:

$|B|_{\mathcal{J}} = \{\textit{Hamlet}\}$,

$|G|_{\mathcal{J}} = \{\text{Bacon, Shakespeare}\}$,

$|H|_{\mathcal{J}} = \{\text{Shakespeare}\}$,

$|K|_{\mathcal{J}} = \{\text{King Hamlet I., King Lear}\}$,

$|M|_{\mathcal{J}} = \{\text{Bacon, Shakespeare, King Hamlet I., King Lear}\}$,

$|U|_{\mathcal{J}} = \emptyset$,

$|R|_{\mathcal{J}} = \{(\text{Shakespeare, } \textit{Hamlet}), (\text{Bacon, } \textit{Hamlet})\}$,

$|W|_{\mathcal{J}} = \{(\text{Shakespeare, } \textit{Hamlet})\}$,

$|X|_{\mathcal{J}} = \{(\text{Bacon, } \textit{Hamlet}, \text{Shakespeare})\}$ (?).

14.5. Komplexere Sätze und ihre Interpretation

Zunächst kann man einfache und **a.l. komplexe Aussagen** ausdrücken:

$Hb \;=_{\mathcal{J}}$ 'Bacon wrote *Hamlet*.'

$Hb \supset Gb \;=_{\mathcal{J}}$ 'If Bacon wrote *Hamlet*, then Bacon was a great writer.'

$Bh \vee \neg Bh \;=_{\mathcal{J}}$ '*Hamlet* is a book, or it isn't.'

$\neg Whh \;=_{\mathcal{J}}$ '*Hamlet* didn't write itself.'

$Bh \wedge Uh \;=_{\mathcal{J}}$ '*Hamlet* is an uninteresting book.'

Die **Quantoren** $\forall$ und $\exists$ erlauben, Aussagen über alles und manches auszudrücken:

$\forall x\ (Ux) \;=_{\mathcal{J}}$ 'All and everything is boring.'

$\neg\exists x\ (\neg Ux) \;=_{\mathcal{J}}$ 'There is nothing that isn't boring.'

$\neg\forall x\ (Bx) \;=_{\mathcal{J}}$ 'Not everything is a book.'

$\exists x\ (\neg Bx)\ =_{\mathcal{J}}$ 'There is something which isn't a book.'

$\exists y\ (Wyh)$ oder $\exists y\ (Hy)\ =_{\mathcal{J}}$ 'Somebody (or something) wrote *Hamlet*.'

$\forall x\ (Hx \supset Gx)\ =_{\mathcal{J}}$ 'For all x: if x wrote *Hamlet*, then x was a great writer.' ('Everyone who[115] wrote *Hamlet* is a great writer.')

$\exists y\ (By \wedge \forall x\ (Hx \supset Gx))\ =_{\mathcal{J}}$ 'There is some y so that: y is a book and if x wrote *Hamlet*, then x was a great writer.' ('There is some book so that everyone or everything that wrote this book is a great writer.')

$\big((s = b) \wedge \big(Hs \wedge \forall x\ (Hx \supset Gx)\big) \supset Gb\big)\ =_{\mathcal{J}}$ 'If Shakespeare is identical to Bacon and Shakespeare wrote *Hamlet* and everyone (everything) who (that) wrote *Hamlet* is a great writer: then Bacon is a great writer.'

$\forall x\ (Bx \wedge Wsx \supset Rbx)\ =_{\mathcal{J}}$ 'Bacon read all the books Shakespeare wrote (or co-authored).'

$\exists z\ \big(\forall x\ (Bx \wedge Wsx \supset Rzx)\big)\ =_{\mathcal{J}}$ 'Somebody read all the books Shakespeare wrote (or co-authored).'

$\neg\exists x\ \big(Kx \wedge \forall y\ (Ky \supset Pxy)\big)\ =_{\mathcal{J}}$ 'For no x: x is a king and for all y: if y is a king than x poisoned y.' ('There is no such thing as a king who poisoned all kings.')

Die **Prädikatkonstante** '$=$' kann genutzt werden, um jede quantifizierte Aussage auszudrücken:

$\exists x\ \big((Kx) \wedge \forall y\ (Ky \supset [y = x])\big)\ =_{\mathcal{J}}$ 'There is only one king.'

$\exists x\ \big((Kx) \wedge (x = s) \wedge \forall y\ (Ky \supset [y = x])\big)\ =_{\mathcal{J}}$ 'Shakespeare is the only king.'

$\exists x\ \big(\exists y\ \big(Kx \wedge Ky \wedge \neg[x = y] \wedge \big(\forall z\ (Kz \supset [z = x] \vee [z = y])\big)\big)\big)\ =_{\mathcal{J}}$ 'There are exactly two kings.'

Für den umgekehrten Weg der **logischen Analyse einer Aussage** ist es oft hilfreich, sich die Wahrheitsbedingungen der Aussage klarzumachen. Die Aussage

Bacon's works are interesting.

etwa hat die folgenden Wahrheitsbedingungen:

There is somebody (or something)
namely Bacon
and there are some other things, too,
i.e., more than one
all of which are books
and all of which have been written by Bacon
and all of which have been written by Bacon alone
and everything which Bacon wrote is a book
and everything which Bacon wrote is not uninteresting.

Man erkennt, wie viele Wahrheitsbedingungen ein Satz haben kann, die alle in einer p.l. Formel ausgedrückt werden müßten.

[115] Es ergibt sich hier strenggenommen nicht, daß nur eine Person (oder ein Ding) *Hamlet* verfaßt hat.

15. Logik der Prädikatenlogik

15.1. Logik der Prädikatenlogik
15.2. Allgemeingültigkeit
15.3. Ungültigkeit
15.4. Kontingenz
15.5. Äquivalenz
15.6. Widersprüchlichkeit
15.7. Prädikatenlogische Folgerung
15.8. Das Entscheidungsproblem
15.9. Wichtige prädikatenlogische Folgerungen und Äquivalenzen

15.1. Logik der Prädikatenlogik

Die Logik der Prädikatenlogik behandelt, wie in der Aussagenlogik, wiederum zunächst die **semantischen Eigenschaften** p.l. Sätze – Allgemeingültigkeit, Ungültigkeit und Kontingenz – und dann **semantische Relationen** zwischen p.l. Sätzen: Äquivalenz, Widersprüchlichkeit und logische Folgerung. Die Stelle der Bewertungen in der AL nehmen in der PL Interpretationen ein.[116]

Der deutlichste Unterschied zur AL ist das Entscheidungsproblem: Es gibt in der PL kein allgemeines Verfahren, um zu entscheiden, ob ein Satz allgemeingültig ist oder nicht. (Dies ließe sich sogar beweisen.)

Für beliebige Sätze schreiben wir weiterhin griechische Buchstaben, um Verwechslungen mit Prädikatbuchstaben zu vermeiden.

15.2. Allgemeingültigkeit

Definition. Ein Satz α der PL heißt **prädikatenlogisch allgemeingültig** (oder: eine Tautologie, auch: prädikatenlogisch wahr) genau dann, wenn er (bei einem nichtleeren Gegenstandsbereich) unter jeder Interpretation wahr ist. Man schreibt: $\models \alpha$.

[116] Man könnte auch beim Begriff der Bewertung bleiben – dann werden nur (anders als in der Aussagenlogik) nicht nur Sätzen Wahrheitswerte zugeordnet, sondern auch Teilen von Sätzen 'semantische Werte'.

Der Zusatz 'bei einem nicht-leeren Gegenstandsbereich' ist nötig, um Sätze der Form

$\forall x\ (Fx) \supset \exists y\ (Fy)$

als allgemeingültig behandeln zu können: Nach der Konvention (s. 11.4) betrachten wir Allsätze bei leerem Gegenstandsbereich als *wahr*, also auch Sätze der Form des Antezedens der Subjunktion, $\forall x\ (Fx)$. Dies hätte aber zur Folge, daß der fragliche Satz widersprüchlich ist, denn bei leerem Gegenstandsbereich ist das Konsequens der Subjunktion, $\exists y\ (Fy)$, *falsch*. Also schließen wir leere Gegenstandsbereiche aus.[117]

Beispiel. Der Satz '$Fa \supset \exists x\ (Fx)$' ist p.l. allgemeingültig:

$\models Fa \supset \exists x\ (Fx)$.

Man kann die Allgemeingültigkeit durch eine **Fallunterscheidung** nachweisen: **(i)** Wenn das Antezedens 'Fa' *wahr* ist, gibt es in der Sprache einen Gegenstand a, dem F zukommt – also kommt es (irgend)einem Gegenstand zu. '$\exists x\ (Fx)$' ist also wahr, und die Subjunktion daher ebenfalls. **(ii)** Wenn das Antezendens 'Fa' *falsch* ist, ist die Subjunktion unabhängig von dem Wahrheitswert des Konsequens wahr. – Die Subjunktion ist also allgemeingültig (s. o. 7.6, s.v. Dilemma).

15.3. Ungültigkeit

Definition. Ein Satz α der PL heißt **prädikatenlogisch ungültig** (oder: widersprüchlich, kontradiktorisch, inkonsistent; auch: prädikatenlogisch falsch) genau dann, wenn er unter jeder Interpretation falsch ist. Man schreibt: $\alpha \models$.

Beispiel. Der Satz '$\forall x\ (Fx) \wedge \exists y\ (\neg Fy)$ ist p.l. widersprüchlich:

$\forall x\ (Fx) \wedge \exists y\ (\neg Fy) \models$.

15.4. Kontingenz

Definition. Für jeden p.l. Satz gilt: Ist er p.l. weder allgemeingültig noch widersprüchlich, dann wird er **prädikatenlogisch kontingent** genannt.

15.5. Äquivalenz

Definition. Zwei Sätze α und β heißen **prädikatenlogisch äquivalent** genau dann, wenn sie unter jeder Interpretation den selben Wahrheitswert haben. Man schreibt: $\alpha \iff \beta$.

[117] Dies haben wir genau genommen schon im Kontext von Interpretationen getan; vgl. 12.2.

Für prädikatenlogisch äquivalente Sätze gilt:

Satz. Zwei Sätze α und β sind prädikatenlogisch äquivalent genau dann, wenn ihre Bisubjunktion allgemeingültig ist: $\alpha \iff \beta$ gdw. $\models \alpha \equiv \beta$.

Dies ist nach der Definition der Bisubjunktion genau dann der Fall, wenn α und β unter gleichen Interpretationen immer den selben Wahrheitswert haben.[118]

15.6. Widersprüchlichkeit

Definition. Eine Menge von Sätzen Γ heißt **prädikatenlogisch inkonsistent** (unverträglich, widersprüchlich) genau dann, wenn unter keiner Interpretation alle Sätze der Menge wahr sind. Man schreibt: $\Gamma \models$.

Für zwei Sätze α und β gilt natürlich: Sie sind genau dann inkonsistent, wenn ihre Konjunktion ungültig ist:

$\alpha,\ \beta \models$ gdw. $\alpha \wedge \beta \models$.

Inkonsistente Sätze können nicht zugleich wahr sein.

15.7. Prädikatenlogische Folgerung

Ein Argument hieß gültig gdw. gilt: Sind die Prämissen wahr, ist auch die Konklusion wahr; man sagt, die Konklusion folgt logisch aus den Prämissen. Diese Definition läßt sich einfach auf die PL übertragen:

Definition. Ein Satz α der PL **folgt prädikatenlogisch** aus einer Menge von Sätzen Γ genau dann, wenn gilt: Unter jeder Interpretation, die alle Sätze der Menge Γ wahr macht, ist auch α wahr. Man schreibt: $\Gamma \models \alpha$.

Spezialfall. Ein Satz α folgt aussagenlogisch aus dam Satz γ genau dann, wenn gilt: In jeder Interpretation, die γ wahr macht, ist auch α wahr. Man schreibt: $\gamma \models \alpha$.

Wiederum gibt es eine Verbindung zwischen der semantischen Beziehung (hier der der gültigen Folgerung) und der Allgemeingültigkeit einer bestimmten Art von Sätzen

[118] Einige Lehrbücher möchten nicht allein Sätze, sondern auch allgemein Ausdrücke (mit freien Variablen) als äquivalent bezeichnen, z. B. $Fx \equiv Gx \iff Gx \equiv Fx$. Warum? Es zahlt sich natürlich irgendwann aus (man spart sich später Umwege). Es erfordert auch aber auch etwas Aufwand. (Kompliziert ist es eigentlich nicht: man muß die freien Variablen nur durch einen Allquantor binden.) Den Aufwand sparen wir ein, mit der Überlegung, daß 'Äquivalenz' eine semantische Eigenschaft ist, also Wahrheit und Falschheit betrifft – und nur Sätze, nicht aber offene Ausdrücke sind wahr oder falsch. Es ist aber eine Geschmacksfrage.

(hier von Subjunktionen):

Satz. Ein Satz α folgt prädikatenlogisch aus einer Menge von Sätzen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ genau dann, wenn gilt: Die Subjunktion $\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n \supset \alpha$ ist allgemeingültig:

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \alpha \quad \text{gdw.} \quad \models \gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n \supset \alpha.$$

15.8. Das Entscheidungsproblem

In der AL sind Wahrheitstafeln hinreichend für das Bestimmen semantischer Eigenschaften und Beziehungen zwischen Sätzen: von Allgemeingültigkeit, Äquivalenz und Folgerungsbeziehungen. Das Problem, ein Verfahren zu finden, um die Allgemeingültigkeit eines p.l. Satzes zu bestimmen, nennt man (im Deutschen wie im Englischen) das Hilbertsche **Entscheidungsproblem**. In der Prädikatenlogik gibt es (wie sich beweisen läßt) **kein allgemeines Verfahren**, um zu entscheiden, ob ein Satz allgemeingültig ist.[119]

15.9. Wichtige prädikatenlogische Folgerungen und Äquivalenzen

Alle a.l. Folgerungen und Äquivalenzen sind auch p.l. Folgerungen bzw. Äquivalenzen; wir führen sie nicht erneut auf.

Im folgenden stehen griechische Kleinbuchstaben wieder für *beliebige* p.l. Sätze/Ausdrücke; dasselbe gilt für die Variablen x und y sowie die Prädikatbuchstaben F, G und M. (Den Zirkumflex setzen wir nicht; in einer Liste ist Verwechslungsgefahr kaum zu befürchten.)

Beziehungen zwischen $\forall$ und $\exists$:

$$\forall x\ (\phi) \iff \neg\exists x\ (\neg\phi)$$

$$\forall x\ (\neg\phi) \iff \neg\exists x\ (\phi)$$

$$\neg\forall x\ (\phi) \iff \exists x\ (\neg\phi)$$

$$\neg\forall x\ (\neg\phi) \iff \exists x\ (\phi)$$

$$\forall x\ (\phi) \models \exists x\ (\phi)$$

Reihenfolge mehrerer Quantoren:

[119] 'Die beiden einander äquivalenten Probleme der *Allgemeingültigkeit* und *Erfüllbarkeit* pflegt man auch mit einem gemeinsamen Namen als das *Entscheidungsproblem* der … Prädikatenkalküls zu bezeichnen. [Man ist] berechtigt, es als das *Hauptproblem der mathematischen Logik* zu bezeichnen.' (Hilbert, Ackermann 1928/1949, § 12; Hervorhebungen im Original). Daß eine allgemeine Lösung des Entscheidungsproblem nicht möglich ist, zeigen 1936 Alonzo Church und Alan Turing; siehe zu diesem Punkt erläuternd: Hoyningen-Huene, 226–228.

$$\forall x\ \big(\forall y\ (\phi)\big) \iff \forall y\ \big(\forall x\ (\phi)\big)$$

$$\exists x\ \big(\exists y\ (\phi)\big) \iff \exists y\ \big(\exists x\ (\phi)\big)$$

$$\exists x\ \big(\forall y\ (\phi)\big) \models \forall y\ \big(\exists x\ (\phi)\big)$$

Aufspalten und Zusammenführen von quantisierten Konjunktionen und Diskunktionen:

$$\forall x\ (\phi \wedge \psi) \iff \forall x\ (\phi) \wedge \forall x\ (\psi)$$

$$\exists x\ (\phi \vee \psi) \iff \exists x\ (\phi) \vee \exists x\ (\psi)$$

$$\forall x\ (\phi) \vee \forall x\ (\psi) \models \forall x\ (\phi \vee \psi)$$

$$\exists x\ (\phi \wedge \psi) \models \exists x\ (\phi) \wedge \exists x\ (\psi)$$

Bekannte Argumentformen der PL:

Modus Barbara

$$\forall x\ (Mx \supset Gx),\ \forall x\ (Fx \supset Mx) \models \forall x\ (Fx \supset Gx)$$

Modus Darii

$$\forall x\ (Mx \supset Gx),\ \exists x\ (Fx \wedge Mx) \models \exists x\ (Fx \wedge Gx)$$

Modus Ferison

$$\neg\exists x\ (Mx \wedge Fx),\ \exists x\ (Mx \wedge Gx) \models \exists x\ (Gx \wedge \neg Fx)$$

16. Kalküle

16.1. Die semantische und syntaktische Explikation von Folgerungen
16.2. Warum Kalküle?
16.3. Hilbert-Kalküle: Axiome
16.4. Gentzen-Kalküle: Schlußregeln
16.5. Beweiszeilen und Schlußregeln

16.1. Die semantische und syntaktische Explikation von Folgerungen

Bislang wurde der Begriff der logischen Folgerung semantisch expliziert, d. h. mit Rückgriff auf die semantischen Begriffe Wahrheit und Falschheit: eine Folgerung ist gültig, wenn unter jeder Bewertung/Interpretation, unter den die Prämissen wahr sind, auch die Konklusion wahr ist. Man kann den Folgerungsbegriff aber auch ohne Rückgriff auf semantische Begriffe explizieren, nämlich **syntaktisch**, d. h. allein die Abfolge und Zusammenstellung von Zeichen betreffend.[120] Man spricht im Fall einer syntaktischen Auffassung der Folgerungsbeziehung von einem **Kalkül**.

Es gibt einige Unterschiede zwischen semantischer Folgerung und syntaktischer Ableitung in Sprachgebrauch und Notation: Statt von Sätzen sprechen wir von **Formeln**; anstelle des double turnstyle (oder 'semantischen Turnstyle') '$\models$' verwenden wir in Kalkülen das einfache oder **syntaktische Turnstyle** '$\vdash$'. (Es hat wiederum keinen etablierten deutschen Namen; analog zu 'Folgerungszeichen' findet man bisweilen 'Ableitungszeichen'.)

Steht es **links** vor einer Formel ϕ, bedeutet es: ϕ **ist im Kalkül ableitbar (beweisbar)**:

$$\vdash \phi$$

Steht es **zwischen** einer vor einer Formelmenge Γ und einer Formel ϕ, bedeutet es: ϕ **ist im Kalkül aus** Γ **ableitbar**:

$$\Gamma \vdash \phi.$$

[120] Einige Autoren, bes. in der mathematischen Logik, unterscheiden zwischen (semantischem) Folgerungsbegriff und (syntaktischem) Ableitungsbegriff, d. h. sie verwenden den Ausdruck 'Folgerung' nur im semantischen Sinn (z. B. Oberschelp, 128).

16.2. Warum Kalküle?

Die semantische Explikation der Folgerungsbeziehung und die syntaktische sind eng verwandt: beide sind ja gedacht eben als Explikationen von 'Folgerung'. Man möchte von einem Kalkül sogar, daß Beziehungen sehr eng sind: daß erstens jeder syntaktisch korrekten Ableitung auch eine semantisch korrekte Folgerung entspricht (sog. **Korrektheit** des Kalküls), und zweitens umgekehrt, daß jeder semantisch korrekten Folgerung auch eine syntaktisch korrekte Ableitung entspricht (sog. **Vollständigkeit** des Kalküls). Formaler:

Definition. Ein Kalkül heißt **korrekt**, wenn für beliebige Mengen von Aussagen Σ und Aussagen α gilt: aus $\Sigma \vdash \alpha$ folgt $\Sigma \models \alpha$.

Definition. Ein Kalkül heißt **vollständig**, wenn für beliebige Mengen von Aussagen Σ und Aussagen α gilt: aus $\Sigma \models \alpha$ folgt $\Sigma \vdash \alpha$.

Wir betrachten im folgenden nur korrekte und vollständige Kalküle. Warum das Ganze dann?

In der AL prüft man, ob ein Argumentschema gültig ist, durch einen Kniff: Interpretiert werden Satzbuchstaben, also Platzhalter für Aussagen, Aussagen sind wahr oder falsch, und daher muß man nicht alle möglichen Interpretationen der Satzbuchstaben untersuchen, sondern nur die Bewertungen. Interpretationen gäbe es unendlich viele, Bewertungen aber nur zwei: wahr und falsch. Und so muß man nur die möglichen Kombinationen dieser beiden Wahrheitswerte für die einzelnen Satzbuchstaben untersuchen; dies geschieht z. B. mit einer Wahrheitstafel – die kann, bei vielen Satzbuchstaben, sehr groß werden, aber im Prinzip funktioniert dieses Verfahren immer.

In der PL kann man denselben Kniff aber nicht anwenden: Man kann nicht anstelle aller möglichen Interpretationen nur die 'Bewertungen' untersuchen, da nicht Platzhalter für Aussagen, sondern Platzhalter für Aussagenbestandteile bewertet werden. Um zu prüfen, ob die Argumentform

$$\begin{array}{ll} \forall x\ (Kx \supset Mx) & x \in \mathcal{D} \\ \forall x\ (Mx \supset Dx) & x \in \mathcal{D} \\ \hline \forall x\ (Kx \supset Dx) & x \in \mathcal{D} \end{array}$$

eine semantisch gültige Folgerung ist, müßte man wiederum prüfen, ob bei jeder Interpretation gilt: Wenn $\forall x\ (Kx \supset Mx)$ und $\forall x\ (Mx \supset Dx)$ wahr sind, dann ist auch $\forall x\ (Kx \supset Dx)$ wahr – nur dann gilt: $\forall x\ (Kx \supset Mx),\ \forall x\ (Mx \supset Dx) \models \forall x\ (Kx \supset Dx)$. Interpretationen gibt es aber unendlich viele. Wenn man aber die fragliche Folgerung in einem Kalkül ableiten kann, der korrekt und vollständig ist, kann man folgern, daß die Folgerung auch semantisch korrekt ist. Das hilft nicht immer (s. o.,

14.8: Hilbertsches Entscheidungsproblem), aber es hilft oft.

Es gibt zwei Arten logischer Kalküle: sog. Hilbert-Kalküle (axiomatische Kalküle) und Gentzen-Kalküle (Kalküle mit Schlußregeln).

16.3. Hilbert-Kalküle: Axiome

Die Idee hinter einem axiomatischen Aufbau eines logischen Kalküls (Hilbert-Kalkül) ist, die ganze Vielfalt logisch allgemeingültiger Formeln auf einige wenige Formeln zurückzuführen, eben die sog. **Axiome**: Formeln, die 'eines Beweises weder fähig noch bedürftig' sind. Ein axiomatischer Aufbau scheint zunächst naheliegend – seit den *Elementen* des griechischen Mathematikers Euklid (einem Lehrbuch der Geometrie, das bis ins 19. Jh. verwendet wurde) gilt ein axiomatischer Aufbau in der Mathematik als ein Ideal (ein Beispiel für ein Axiomensystem ist das von Kolmogoroff, dem es gelang, die gesamte Wahrscheinlichkeitstheorie auf drei sehr einfache Axiome zurückzuführen). Auch in der Philosophie fand und findet sich die axiomatisch-deduktive Behandlung eines Themas (die Behandlung 'more geometrico' [121]) als Darstellungs-Ideal.

Wir betrachten hier nur ein einfaches Beispiel für ein a.l. Axiomensystem und einen einzigen kurzen Beweis. Das Ziel ist allein zu verstehen, warum diese Art des Aufbaus für die Logik unattraktiv ist und meist Gentzen-Kalküle (Systeme des natürlichen Schließens und Sequenzenkalküle) vorgezogen werden.

Unser Axiomensystem hat drei **Axiomen-Schemata** und eine **Schlußregel**. Der Ausdruck 'Axiomen-Schema' verweist – ebenso wie die Verwendung griechischer Buchstaben als Formelplatzhalter – wieder darauf, daß für die Platzhalter beliebige (also auch gleiche) Formeln eingesetzt werden können (da es unendlich viele Formeln gibt, gibt es also auch unendlich viele Axiome). Der Kalkül kennt eine Schlußregel, mit der (allgemeingültige) Formeln aus (allgemeingültigen) Formeln abgeleitet werden können: den Modus ponendo ponens. In Kalkülen nennt man ihn meist **Abtrennungsregel** (rule of detachment).

Axiomen-Schemata:

$\vdash \alpha \supset (\beta \supset \alpha)$ Axiom 1

$\vdash \big(\alpha \supset (\beta \supset \gamma)\big) \supset \big((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma)\big)$ Axiom 2

$\vdash (\neg\beta \supset \neg\alpha) \supset (\alpha \supset \beta)$ Axiom 3

Schlußregel:

[121] 'In der Art der Geometrie', wie es in Anlehnung an Spinozas *Ethica Ordine Geometrico demonstrata* (1677) heißt.

Aus $\vdash \alpha$ und $\vdash (\alpha \supset \beta)$ kann $\vdash \beta$ abgeleitet werden. Abtrennungsregel

Beispiel. Beweis von $\vdash \phi \supset \phi$. Die Beweiszeilen sind links nummeriert; am Ende der Zeile steht jeweils das Axiom bzw. die Schlußregel, die der Ableitung zugrundeliegt:

1	$\vdash \big(\phi \supset \big((\phi \supset \phi) \supset \phi\big)\big) \supset \big(\big(\phi \supset (\phi \supset \phi)\big) \supset (\phi \supset \phi)\big)$	Axiom 2 [122]
2	$\vdash \phi \supset \big((\phi \supset \phi) \supset \phi\big)$	Axiom 1 [123]
3	$\vdash \phi \supset (\phi \supset \phi)$	Axiom 1 [124]
4	$\vdash \big(\phi \supset (\phi \supset \phi)\big) \supset (\phi \supset \phi)$	Abtrennungsregel, Zeile 1, 2 [125]
5	$\vdash \phi \supset \phi$	Abtrennungsregel, Zeile 3, 4 [126]

Hier zeigen sich zwei Punkte: Erstens scheint es ein klein wenig so, als würde etwas vergleichsweise Offensichtliches ('$\vdash \phi \supset \phi$') aus etwas vergleichsweise weniger Offensichtlichem (Axiom 2) abgeleitet – warum sollte Axiom 2 'eines Beweises weder fähig noch bedürftig' sein, '$\vdash \phi \supset \phi$' aber wohl? Zweitens fragt man sich ganz praktisch, wie einem solche Beweise einfallen sollen.[127] Dies geht nicht nur dem Anfänger so; auch aus Sicht des Logikers ist das Vorgehen 'unnatürlich' und nicht im Einklang mit dem tatsächlichen Vorgehen bei Beweisen.

16.4. Gentzen-Kalküle: Schlußregeln

Hilbert-Kalküle haben typischerweise mehrere Axiomen-Schemata und nur eine Schlußregel, meist den Modus ponendo ponens (Abtrennungsregel); Gentzen-Kalküle hingegen legen hingegen den Schwerpunkt auf Schlußregeln, die meist mit bestimmten Junktoren oder Quantoren verbunden sind. Eine Grundüberlegung Gentzens war, ein System des Schließens zu entwickeln, daß dem tatsächlichen Schließen nahekommt – daher der Name 'System des natürlichen Schließens' (welches er später durch sog. Sequenzenkalküle ergänzte bzw. verallgemeinerte).

Drei Aspekte der Idee von Gentzen-Kalkülen sollen kurz erläutert werden: (i) Schlußregeln in Genzten-Kalküle beschreiben nicht Ableitungen von Formeln (Sätzen) aus Formeln (Sätzen), sondern von Folgerungen aus Folgerungen; (ii) Gentzen-Kalküle gestatten, Annahmen zu machen, die wieder verworfen werden; (iii) die Schlußregeln

[122] Axiom 2 mit $\alpha = \phi$, $\beta = (\phi \supset \phi)$ und $\gamma = \phi$.
[123] Axiom 1 mit $\alpha = \phi$ und $\beta = (\phi \supset \phi)$.
[124] Axiom 1 mit $\alpha = \phi$ und $\beta = \phi$.
[125] Zeile 2 entspricht dem Antezedens von Zeile 1 (bis auf die Klammern); Zeile 4 ergibt sich daher (bis auf die Klammern) nach der Abtrennungsregel (Modus ponendo ponens).
[126] Zeile 3 entspricht dem Antezedens von Zeile 4 (bis auf die Klammern); Zeile 5 ergibt sich daher (bis auf die Klammern) nach der Abtrennungsregel (Modus ponendo ponens).
[127] Die zweite Frage findet eine Teilantwort darin, daß man einmal Bewiesenes, hier etwa '$\phi \supset \phi$' als Ausgangspunkt folgender Beweise nehmen kann, was das Vorgehen sehr vereinfacht. Das Axiomenensystem und der Beweis ist der sehr klaren Behandlung in Bostock, Kap. 5, entnommen.

sind auf Junktoren und Quantoren bezogen.

(i) Betrachten wir noch einmal die Schlußregel (Abtrennungsregel, Modus ponendo ponens) im Hilbert-Kalkül:

Aus $\vdash \alpha$ und $\vdash \alpha \supset \beta$ kann $\vdash \beta$ abgeleitet werden. Abtrennungsregel

Nach dieser Regel gilt: Wenn α und $(\alpha \supset \beta)$ bewiesen sind, dann ist β bewiesen. Die Regel gestattet also die Ableitung von Formeln (Aussagen) aus Formeln (Aussagen). Oft weiß man beim Schließen aber nicht, ob die Aussagen, von denen man ausgeht, bewiesen sind – man 'nimmt sie an' (aber sie könnten falsch sein). Die Gentzen-Kalküle tragen dem Rechnung, indem sie Schlußregeln verwenden, die **von Folgerungen zu Folgerungen** führen:

Aus $\Gamma \vdash \alpha$ und $\Sigma \vdash \alpha \supset \beta$ kann $\Gamma,\ \Sigma \vdash \beta$ abgeleitet werden. Abtrennungsregel

Hier setzt man nicht voraus, daß z. B. α bewiesen ist – nur, daß α aus Γ folgt. Das bedeutet, hier ist tatsächlich die **Folgerungsbeziehung grundlegend** (nicht allgemeingültige Sätze, wie beim axiomatischen Aufbau).

Woher weiß man aber, daß α aus Γ folgt? Die Antwort hat zwei Teile: In bestimmten Fällen weiß man es, und diese Fälle kann man als Basis wählen: z. B. weiß man, daß α aus α folgt ($\alpha \vdash \alpha$), und wenn α in der Menge Γ ist, folgt α aus Γ. (Dies klingt banal, aber oben, im Hilbert-Kalkül, mußten wir $\alpha \vdash \alpha$ beweisen – hier nehmen wir es als Grundlage.) Zweitens ist gar nicht notwendig, daß α aus Γ folgt: dies ist nur eine Annahme, und die kann falsch sein. Der Kalkül beschreibt nur, welche anderen Folgerungen sich aus dieser Annahme ableiten lassen: der Gegenstand sind die Ableitung von **Folgerungen aus Folgerungen**.

(ii) Beispiele für Annahmen, die wieder verworfen werden, sind etwa indirekte Beweise (die Annahme führt zu einem Widerspruch) oder Dilemmata:

Aus $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ und $\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta$ kann $\Gamma \vdash \beta$ abgeleitet werden. Dilemma

Hier folgt (3) aus (1) und (2); die Annahmen α bzw. $\neg\alpha$ dienen nur für das Argument (sie können ja nicht beide beweisbar sein).[128]

(iii) Man wählt als Schlußregeln solche, die mit der Einführung oder Eliminierung einzelner Junktoren oder Quantoren verbunden sind, z. B.:

Aus $\Gamma \vdash \alpha$ kann $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$ abgeleitet werden. Einführung Adjunktion

[128] Beispiel: Der Sophist Protagoras soll mit Euathlos vereinbart haben, ihn in Rhetorik zu unterweisen; der Vertrag sah vor, daß Euathlos nur bei Erfolg zahlen sollte, nämlich wenn er seinen ersten Prozeß gewinnt. Euathlos wollte nicht zahlen; Protagoras soll vor Gericht argumentiert haben: Wenn er (Protagoras) den Prozeß gewönne, müsse Euathlos zahlen (aufgrund des Urteils); wenn er den Prozeß verlöre, müsse Euathlos auch zahlen (aufgrund des Vertrages). Die Geschichte ist tradiert bei Aulus Gellius, *Noctes Atticae* 5.10. Euathlos argumentierte gerade umgekehrt; das Ganze nennt sich Sophismus des Euathlos, engl. paradox of the court.

16.5. Beweiszeilen und Schlußregeln

Als **Beweiszeilen** oder **Sequenzen** [129] bezeichnet man einfach die Schritte eines Beweises. Beweiszeilen sind aufgebaut wie eine Folgerung: Links stehen Formeln oder Formelmengen, die sog. **Annahmen** oder das Antezedent; in der Mitte als Ableitungszeichen das einfache Turnstyle; rechts steht eine weitere Formel, die **Behauptung** oder das Sukzedent: [130]

$$\underbrace{\Gamma,\ \alpha}_{\text{Annahmen}} \quad \vdash \quad \underbrace{\beta.}_{\text{Behauptung}} \qquad \text{Beweiszeile (oder Sequenz)}$$

Die **Schlußregeln** oder kurz **Regeln** des Kalküls geben an, wie man von Beweiszeilen andere Beweiszeilen ableiten kann. Wir trennen – nur bei der Definition – die neue Beweiszeile durch einen Strich von der oder den vorangehenden ab. Die oben angeführte Schlußregel zur Einführung der Adjunktion etwa schreiben wir folgendermaßen:

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}\ \text{AE}$$

Es gibt auch Schlußregeln mit mehreren Prämissenzeilen: [131]

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \alpha \\ \Sigma \vdash \beta\end{array}}{\Gamma,\ \Sigma \vdash \alpha \wedge \beta}\ \text{KE}$$

Schließlich gibt es auch Schlußregeln ohne Prämissenzeilen.

Definitionen. Eine Beweiszeile $\Gamma,\ \alpha\ \vdash\ \beta$ nennt man **korrekt** gdw. gilt: $\Gamma,\ \alpha\ \models\ \beta$; eine Schlußregel nennt **korrekt** gdw. wenn sie aus korrekten Beweiszeilen nur korrekte Beweiszeilen abzuleiten gestattet.

Ein Kalkül mit ausschließlich korrekten Schlußregeln ist, wie sich zeigen ließe, ein korrekter Kalkül.

[129] Gentzen führte 'Sequenz' als Fachwort ein, da der Ausdruck 'Folge' schon anderweitig verwendet wurde; der Ausdruck verweist einfach darauf, daß links Annahmen, rechts eine Behauptung steht.
[130] Man schreibt $\Sigma,\ \phi\ \vdash\ \psi$ oft auch $\Sigma,\ \phi\ \Longrightarrow\ \psi$ oder einfach als $\Sigma\phi\psi$ (dies ist eindeutig, wenn nur eine Behauptung (Sukzendent) zulässig ist).
[131] Man schreibt die beiden Prämissen bisweilen auch in einer Zeile.

17. Sequenzen-Kalkül (Aussagenlogik)

17.1. Der Sequenzenkalkül: Grundregeln und a.l. Schlußregeln
17.2. Ableitungen a.l. Beziehungen
17.3. Abgeleitete (eliminierbare) Schlußregeln

17.1. Der Sequenzenkalkül: Grundregeln und a.l. Schlußregeln

Der folgende Sequenzenkalkül [132] hat zwei Grundregeln sowie mehrere, den einzelnen Junktoren zugeordnete Regeln. Oberhalb des Strichs stehen die Annahmen oder schon abgeleiteten Beweiszeilen; unter dem Stich steht die neu aus diesen abgeleitete Beweiszeile; rechts neben dem Strich steht ein Kürzel für die Schlußregel.

Die ersten beiden Regeln sind die sog. **Grundregeln** des Kalküls:

Annahmeregel:

$$\frac{}{\alpha \vdash \alpha}\ \mathrm{A}$$

Schnittregel (engl. cut rule):[133]

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma \vdash \alpha \\ \Upsilon, \alpha \vdash \beta\end{array}}{\Sigma, \Upsilon \vdash \beta}\ \mathrm{S}$$

Mit der **Negation** sind das Tertium non datur und Ex falso quodlibet verbunden:

Tertium non datur:[134]

$$\frac{}{\vdash \alpha \vee \neg\alpha}\ \mathrm{TND}$$

[132] Sequenzenkalküle lassen allgemein auch Formelmengen (nicht nur Einzelformeln) im Sukzedent zu.
[133] Die Schnittregel entspricht dem Modus ponendo ponens; der sog. Gentzensche Hauptsatz (1934) besagt, daß die Schnittregel in allen Gentzen-Kalkülen gültig ist.
[134] Hier könnte man jeden Widerspruch einsetzten; alternativ könnte man auch verwenden: Aus '$\Sigma,\ \phi\ \vdash \psi$' und '$\Upsilon,\ \neg\phi\ \vdash\ \psi$' ist '$\Sigma, \Upsilon\ \vdash\ \psi$' ableitbar.

Ex falso quodlibet:[135]

$$\frac{}{\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \beta}\ \text{EFQ}$$

Es folgen Regeln zur Einführung und Beseitigung der einzelnen **Junktoren**:

Konjunktionseinführung

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma \vdash \alpha \\ \Upsilon \vdash \beta\end{array}}{\Sigma,\ \Upsilon \vdash \alpha \wedge \beta}\ \text{KE}$$

Konjunktionsbeseitigungen:

$$\frac{\Sigma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Sigma \vdash \alpha}\ \text{KB}$$

$$\frac{\Sigma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Sigma \vdash \beta}\ \text{KB}$$

Adjunktionseinführungen:

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma,\ \alpha \vdash \gamma \\ \Upsilon,\ \beta \vdash \gamma\end{array}}{\Sigma,\ \Upsilon,\ \alpha \vee \beta \vdash \gamma}\ \text{AE}$$

$$\frac{\Sigma \vdash \alpha}{\Sigma \vdash \alpha \vee \beta}\ \text{AE}$$

$$\frac{\Sigma \vdash \alpha}{\Sigma \vdash \beta \vee \alpha}\ \text{AE}$$

Subjunktionseinführung und -beseitigung:

$$\frac{\Sigma,\ \alpha \vdash \beta}{\Sigma \vdash \beta \supset \alpha}\ \text{SE}$$

[135] Alternativ könnte man auch verwenden: Aus '$\Sigma \vdash \phi$' und '$\Upsilon \vdash \neg\phi$' ist '$\Sigma,\ \Upsilon \vdash \psi$' ableitbar.

$$\frac{\Sigma \vdash \alpha \supset \beta}{\Sigma, \alpha \vdash \beta}\ \text{SB}$$

Bikonditional-Einführung und -beseitigung:

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma, \alpha \vdash \beta \\ \Upsilon, \beta \vdash \alpha\end{array}}{\Sigma, \Upsilon \vdash \alpha \equiv \beta}\ \text{BE}$$

$$\frac{\Sigma \vdash \alpha \equiv \beta}{\Sigma, \alpha \vdash \beta}\ \text{BB}$$

$$\frac{\Sigma \vdash \alpha \equiv \beta}{\Sigma, \beta \vdash \alpha}\ \text{BB}$$

17.2. Ableitungen a.l. Beziehungen

In den folgenden Ableitungen steht links die Zeilennummer, in der Mitte die Sequenz und rechts die Regel, aufgrund derer die Sequenz abgeleitet werden kann (Ziffern in Klammern bezeichnen die Zeilen, auf die sich die Regel ggf. bezieht).

$\alpha \wedge \beta \vdash \beta \wedge \alpha$

1	$\alpha \wedge \beta \vdash \alpha \wedge \beta$	A
2	$\alpha \wedge \beta \vdash \beta$	KB (1)
3	$\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$	KB (1)
4	$\alpha \wedge \beta \vdash \beta \wedge \alpha$ ■	KE (2, 3)

$\alpha \vdash \beta \supset \alpha$

1	$\alpha \vdash \alpha$	A
2	$\beta \vdash \beta$	A
3	$\alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta$	KE (1, 2)
4	$\alpha, \beta \vdash \alpha$	KB (3)
5	$\alpha \vdash \beta \supset \alpha$ ■	SE (4)

$\alpha \supset \beta, \alpha \vdash \beta$

1	$\alpha \supset \beta \vdash \alpha \supset \beta$	A
2	$\alpha \supset \beta, \alpha \vdash \beta$ ■	SB (1)

$$\vdash \alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$$

1	$\alpha \vdash \alpha$	A
2	$\alpha \vdash \beta \vee \alpha$	AE (1)
3	$\alpha \vdash \alpha \vee \beta$	AE (1)
4	$\beta \vdash \beta$	A
5	$\beta \vdash \beta \vee \alpha$	AE (4)
6	$\beta \vdash \alpha \vee \beta$	AE (4)
7	$\alpha \vee \beta \vdash \beta \vee \alpha$	AE (2, 5)
8	$\beta \vee \alpha \vdash \alpha \vee \beta$	AE (3, 6)
9	$\vdash \alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$ ■	BE (7, 8)

$$\neg\alpha \vee \neg\beta \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$$

1	$\alpha \wedge \beta \vdash \alpha \wedge \beta$	A
2	$\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$	KB (1)
3	$\alpha \wedge \beta \vdash \beta$	KB (1)
4	$\neg\alpha \vdash \neg\alpha$	A
5	$\alpha \wedge \beta, \neg\alpha \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$	KE (2, 4)
6	$\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$	EFQ
7	$\alpha \wedge \beta, \neg\alpha \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$	S (5, 6)
8	$\neg\beta \vdash \neg\beta$	A
9	$\alpha \wedge \beta, \neg\beta \vdash \beta \wedge \neg\beta$	KE (3, 8)[136]
10	$\beta \wedge \neg\beta \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$	EFQ
11	$\alpha \wedge \beta, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$	S (9, 10)
12	$\alpha \wedge \beta, \neg\alpha \vee \neg\beta \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$	AE (7, 11)
13	$\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$	A
14	$\neg\alpha \vee \neg\beta,$ $(\alpha \wedge \beta) \vee \neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$	AE (12, 13)
15	$\vdash (\alpha \wedge \beta) \vee \neg(\alpha \wedge \beta)$	TND
16	$\neg\alpha \vee \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$ ■	BE (7, 8)

17.3. Abgeleitete (eliminierbare) Regeln

Fallunterscheidung:

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma, \alpha \vdash \beta \\ \Upsilon, \neg\alpha \vdash \beta\end{array}}{\Sigma, \Upsilon \vdash \beta}\ \text{fu}$$

[136] Idee: Wir erzeugen einen Widerspruch, mit dem Ziel, daraus irgendetwas (Gewünschtes) ableiten zu dürfen, und den Widerspruch per Schnittregel zu entfernen (Z. 10/11).

Ableitung:

1	$\Sigma, \alpha \vdash \beta$	Voraussetzung
2	$\Upsilon, \neg\alpha \vdash \beta$	Voraussetzung
3	$\Sigma, \Upsilon, \alpha \vee \neg\alpha \vdash \beta$	AE
4	$\vdash \alpha \vee \neg\alpha$	TND
5	$\Sigma, \Upsilon \vdash \beta$ ■	S (3, 4)

Widerspruchsregel:

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma \vdash \alpha \\ \Upsilon \vdash \neg\alpha\end{array}}{\Sigma, \Upsilon \vdash \beta}\ \text{wid}$$

Gezeigt werden muß wieder, daß die Konklusion auf der Grundlage der Grundregeln und der angenommenen Prämissen ableitbar ist. Beweis:

1	$\Sigma \vdash \alpha$	Voraussetzung
2	$\Upsilon \vdash \neg\alpha$	Voraussetzung
3	$\Sigma, \Upsilon \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$	KE (1, 2)
4	$\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \beta$	EFQ
5	$\Sigma, \Upsilon \vdash \beta$ ■	S (3, 4)

Modus ponendo ponens:

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma \vdash \alpha \supset \beta \\ \Upsilon \vdash \alpha\end{array}}{\Sigma, \Upsilon \vdash \beta}\ \text{mpp}$$

Beweis:

1	$\Sigma \vdash \alpha \supset \beta$	Voraussetzung
2	$\Upsilon \vdash \alpha$	Voraussetzung
3	$\Sigma, \alpha \vdash \beta$	SB (1)
5	$\Sigma, \Upsilon \vdash \beta$ ■	S (2, 3)

Modus tollendo tollens:

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma \vdash \alpha \supset \beta \\ \Upsilon \vdash \neg\beta\end{array}}{\Sigma, \Upsilon \vdash \neg\alpha}\ \text{mtt}$$

Beweis:

1	$\Sigma \vdash \alpha \supset \beta$	Voraussetzung
2	$\Upsilon \vdash \neg\beta$	Voraussetzung
3	$\Sigma, \alpha \vdash \beta$	SB (1)
4	$\Sigma, \neg\beta \vdash \neg\alpha$	Kontraposition kp (s. u.)
5	$\Sigma, \Upsilon \vdash \neg\alpha$ ■	S (2, 4)

Benutzt wurde hier eine (von vier) ableitbaren **Kontrapositionsregeln**:

$$\frac{\Sigma, \alpha \vdash \beta}{\Sigma, \neg\beta \vdash \neg\alpha}\ \text{kp}$$

Beweis:

1	$\Sigma, \alpha \vdash \beta$	Voraussetzung
2	$\beta \vdash \beta$	A
3	$\Sigma, \alpha, \beta \vdash \neg a$	wid (1, 2)
4	$\neg\alpha \vdash \neg\alpha$	A
5	$\Sigma, \neg\beta \vdash \neg\alpha$ ■	fu (3, 4)

Weitere **Kontrapositionsregeln**:

$$\frac{\Sigma, \neg\alpha \vdash \beta}{\Sigma, \neg\beta \vdash \alpha}\ \text{kp}$$

$$\frac{\Sigma, \alpha \vdash \neg\beta}{\Sigma, \beta \vdash \neg\alpha}\ \text{kp}$$

$$\frac{\Sigma, \neg\alpha \vdash \beta}{\Sigma, \beta \vdash \alpha}\ \text{kp}$$

Annahmeverbindung und -zerlegung:

$$\frac{\Sigma, \alpha, \beta \vdash \gamma}{\Sigma, \alpha \wedge \beta \vdash \gamma}\ \text{av}$$

$$\frac{\Sigma, \alpha \wedge \beta \vdash \gamma}{\Sigma, \alpha, \beta \vdash \gamma}\ \text{az}$$

Verdünnungsregel:

$$\frac{\Sigma \vdash \alpha}{\Upsilon \vdash \alpha} \text{ vd; Voraussetzung: } \Sigma \subseteq \Upsilon.$$

A. Venn-Diagramme

A.1. Mengen und Klassen
A.2. Euler-Diagramme
A.3. Venn-Diagramme

A.1. Mengen und Klassen

Die Ausdrücke 'Menge' (set) und 'Klasse' (class) wurden bis zur Wende zum 20. Jh. austauschbar gebraucht. Heute unterscheidet die Mathematik zwischen beiden Ausdrücken – 'Klasse' ist der weitere Begriff. Jede Menge ist eine Klasse, aber nicht jede Klasse ist eine Menge: es gibt sogenannte echte Klassen (proper classes, flapsig 'Unmengen').

Eine **Klasse** ist eine Zusammenfassung (keine 'Menge') von Gegenständen, die eine gemeinsame Eigenschaft haben.

Eine **Menge** ist (s. 13.2) eine Klasse, für die einige Einschränkungen gelten. Die berühmte Bestimmung Georg Cantors lautet: "Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen." [137]

Diese Bestimmung führt zu Problemen: Bertrand Russell fragte sich, ob es die Menge aller Mengen gibt, die sich selbst nicht als Element enthalten, formal $R = \{x \mid x \notin x\}$? Wenn R sich selbst als Element enthält, folgt, daß R sich nicht als Element enthält – es erfüllt ja das Merkmal der Menge nicht. Wenn R sich hingegen nicht als Element enthält, erfüllt sie das Merkmal, und also wäre sie doch ein Element der Menge. Dies ist die sog. **Russellsche Antinomie** (*The Principles of Mathematics*, 1903, § 106). Es gibt also keine *Menge* dieser Art, wohl aber eine (echte) Klasse: die Russellsche Klasse $R = \{x \mid x \notin x\}$.

Eine weitere echte Klasse ist die sog. Allklasse $C = \{x \mid x = x\}$.[138] Sie ist, wie Georg

[137] Georg Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen* 46, 1895, S. 481–512, hier S. 481.
[138] Bei der Bedingung könnte auch eine andere Tautologie stehen.

Cantor 1899 zeigte, keine Menge: Wenn sie eine Menge wäre, dann müßte man die Menge aller Teilmengen (die Potenzmenge) bilden können. Diese Potenzmenge müßte einerseits eine Teilmenge der Allklasse sein (die ja alle Mengen umfaßt); andererseits ist die Potenzmenge aus der Allklasse gebildet und sollte nach dem Satz von Cantor (als Menge aller Teilmengen) 'mächtiger' sein als diese. Diese sog. **zweite Cantorsche Antinomie** zeigt, daß die Allklasse eine echte Klasse (aber keine Menge) ist.[139]

A.2. Euler-Diagramme

Seit dem 17. Jahrhundert wurden verschiedene Formen der graphischen Darstellung logischer Verhältnisse entworfen, teils mit dem Ziel einer Veranschaulichung, teils mit dem Ziel, eine der Logik angemessenere Darstellungsform zu finden.[140] Die beiden geläufigsten Formen sind **Euler-Diagramme** und **Venn-Diagramme**.[141]

In **Euler-Diagrammen** wird die Extension eines Begriffs (einstelligen Prädikats) durch eine umschlossene Fläche, etwa einen Kreis, wiedergegeben. Haben zwei Begriffe die selbe Extension, werden sie durch die selbe Fläche dargestellt; schließen sich zwei Begriffe aus, überschneiden sich die Flächen beider Begriffe nicht; überschneiden sich Begriffe teilweise, überschneiden sich auch die ihre Extension ausdrückenden Flächen teilweise; ist ein Begriff ein (echter oder unechter) Teilbegriff eines anderen, wird seine Fläche durch einen (meist: echten) Teil der Fläche des zweiten dargestellt. Ein Beispiel für eine Art von Euler-Diagrammen ist die erste Graphik in Abb. A.1 (Auszug aus John Venns *Symbolic Logic* (1881), in dem Venn Euler- und Venn-Diagramme gegenüberstellt).

Euler-Diagramme sind übersichtlich, wenn man die Beziehungen zwischen den Extensionen von Begriffen *vollständig* kennt. Als Diagramme zur Darstellung von Begriffsverhältnissen, die in Syllogismen auftreten, sind Euler-Diagramme nur bedingt geeignet, denn alle vier Arten von Aussagen, die im Syllogismus auftreten, sind hinsichtlich ihrer Darstellung im Euler-Diagramm **uneindeutig**:

(a) Universell bejahende Aussagen – 'Alle S sind P' – würde man gewöhnlich durch einen kleinen Kreis S darstellen, der ganz in einem großen Kreis P liegt; aber die Aussage läßt offen, ob S eine *echte* Teilmenge von P ist; sind auch alle P S, müßte man besser einen Kreis für beide zeichnen.

[139] Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen* (ed. Ernst Zermelo), Berlin: Springer, 1932, S. 448. – Darstellungen mathematischer Grundbegriffe für Philosophen finden sich im Handbuch Eric Steinhart, *More Precisely*, Peterborough, Ontario, u. a.: Broadview, 2009, hier S. 62–64.

[140] Das zweite Ziel etwa verfolgte C. S. Peirce mit seinen 'Existential graphs'; diese bilden tatsächlich einen korrekten und vollständigen aussagen- und prädikatenlogischen Kalkül.

[141] Euler-Diagramme sind nach dem Mathematiker Leonard Euler (18. Jh.) benannt (tatächlich sind sie älter; vgl. Stiegler's law of eponomy), Venn-Diagramme nach dem Logiker John Venn (*Symbolic Logic*, London: Macmillan 1881).

(e) Universell verneinende Aussagen – ‘Kein S ist P’ – würde man durch zwei Kreise darstellen, die sich nicht schneiden; aber die Aussage läßt offen, ob die Extensionen von S und P komplementär sind.

(i) Partikulär bejahende Aussagen – ‘Einige S sind P’ – würde man durch zwei sich schneidende Kreise darstellen; dies läßt erstens offen, ob die Extension von S eine echte Teilmenge der Extension von P ist (sonst müßte S ganz in P liegen), und zweitens, ob es P gibt, die nicht S sind (man könnte dies darstellen, indem man den äußeren Teil des P-Kreises gestrichelt zeichnet).

(o) Partikulär verneinende Aussagen – ‘Einige S sind nicht P’ – würde man ebenfalls durch zwei sich schneidende Kreise darstellen; dies läßt erstens offen, ob die Extension von S eine echte Teilmenge der Extension von $\neg P$ ist (sonst dürfte S P nicht schneiden), und wiederum, die Extensionen von P und S nicht komplementär sind. – Ein weiteres Problem bereitet die Darstellung der Möglichkeit leerer Mengen (dieses Problem stellt sich bei der klassischen Auffassung von Syllogismen nicht).[142]

A.3. Venn-Diagramme

In Venn-Diagrammen stellen die Flächen (wiederum meist Kreise) nicht die tatsächlichen, sondern die möglichen Extensionen von Begriffen dar. Die Kreise werden überlappend in einer Weise gezeichnet, daß *jede mögliche* Überschneidung dargestellt wird, und sich so jedes mögliche Begriffsverhältnis ausdrücken läßt. Nennen wir die einzelnen so getrennten Teilflächen ‘Bereiche’.

Ist ein bestimmter Bereich leer, wird er **schraffiert bzw. gefärbt**; ist ein Bereich nicht leer, so trägt man einen **Punkt** oder ein **Kreuz in den Bereich** ein; um zu markieren, daß einer von zwei aneinandergrenzenden Bereichen nicht-leer ist, zeichnet man den **Punkt bzw. Kreuz auf die Schnittlinie**.

Die Art der Darstellungen wird im Beispiel deutlicher: Venn-Diagramme eignen sich gut für die Darstellung von **Syllogismen**. Die drei im Syllogismus auftretenden Begriffe P, S und M werden durch drei sich wechselseitig überschneidende Kreise darstellt. Das Venn-Diagramm enthält also acht verschiedene Bereiche, sieben innere sowie den Außenbereich.

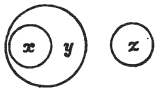
Allgemein bejahende (a) bzw. verneinende (e) Aussagen werden durch eine Schraffur eingetragen, indem die Bereiche, die gemäß der Aussage leer sind, durch Schraffur markiert werden.

[142] Vgl. die Kritik in Venn, *Symbolic Logic*, London 1881, S. 424–425. Cohen/Nagel, S. 39, beschreiben eine verbesserte Form von Euler-Diagrammen mit gestrichelten Linien, die Teile dieser Probleme beheben (müßte aber im letzten Diagramm, rechts unten, für Aussagen der Form o, nicht die Außenseite von P ebenfalls gestrichelt sein?).

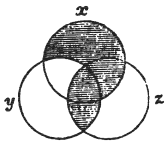
As the syllogistic figures are the form of reasoning most familiar to ordinary readers, I will begin with one of them, though they are too simple to serve as effective examples. Take, for instance,

No Y is Z,
All X is Y,
∴ No X is Z.

This would commonly be exhibited thus:



It is easy enough to do this; for in drawing our circles we have only to attend to two terms at a time, and consequently the relation of X to Z is readily detected; there is not any of that troublesome interconnexion of a number of terms simultaneously with one another which gives rise to the main perplexity in complicated problems. Accordingly such a simple example as this is not a very good one for illustrating the method now proposed; but, in order to mark the distinction, the figure to represent it is given, thus:



In this case the one particular relation asked for, viz. that of X to Z, it must be admitted, is not made more obvious on our plan than on the old one. The superiority, if any, in such an example must rather be sought in the completeness of the pictorial information in other respects—as, for instance, that, of the four kinds of x which may have to be taken into consideration, one only, viz. the $xy\bar{z}$, or the 'x that is y but is not z', is left surviving. Similarly with the possibilities of y and z: the relative number of these, as compared with the actualities permitted by the data, is detected at a glance.

Abb. A.1. Auszug aus John Venn, *Symbolic Logic*, London 1881, S. 115–116. Im Euler-Diagramm oben wird die erste Prämisse eines Syllogismus, "No Y is Z", dadurch ausgedrückt, daß sich die Kreise y und z nicht überschneiden (keine gemeinsame Extension haben); die zweite Prämisse, "All X are Y", wird dadurch dargestellt, daß der Kreis x ganz im Kreis y liegt. Die Konklusion, "No X is Z", kann man nun im Diagramm ablesen: die Kreise x und z überschneiden sich nicht.

Im Venn-Diagramm unten überschneiden sich die drei Kreise x, y und z so, daß alle möglichen Überschneidungen vorkommen. Die erste Prämisse, "No Y is Z", wird eingetragen, indem die Schnittmenge von y und z schraffiert wird, um darzustellen, daß die Menge leer ist; die zweite Prämisse, "All X are Y", wird dargestellt durch des Bereichs von x, der nicht in y liegt. Die Konklusion, "No X is Z", kann man wiederum im Diagramm ablesen: Die Schnittmenge von x und z ist schraffiert (und also leer).

Partikulär bejahende (i) bzw. verneinende (o) Aussagen werden eingetragen, indem ein Punkt in den Bereichen eingetragen wird, der gemäß der Aussage nicht leer ist: Ein Punkt mitten in einem der acht elementaren Bereiche soll markieren, daß dieser eine Bereich nicht-leer ist; im Syllogismus machen die Prämissen oft eine Aussage darüber, daß eine Vereinigung von zwei Bereichen nicht-leer ist: dann tragen wir den Punkt auf der Linie zwischen den Bereichen ein. Abb. A.2 gibt eine Übersicht über die Darstellung der vier Arten von Aussagen.

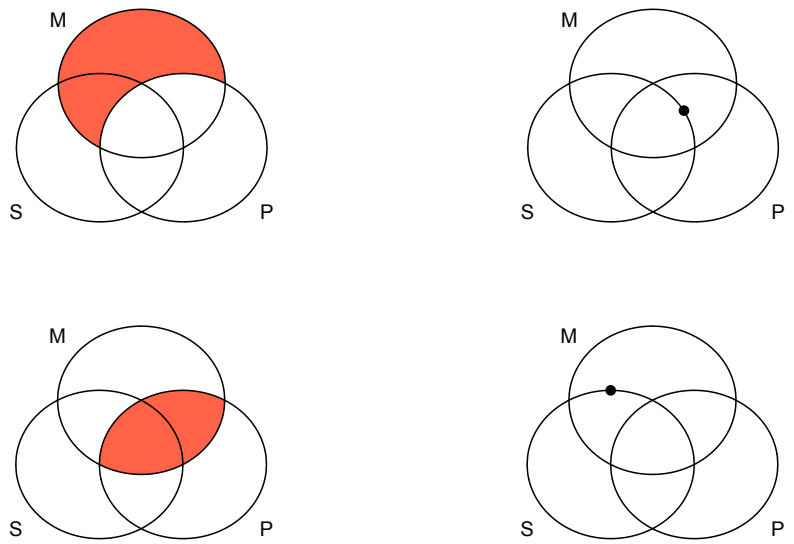


Abb. A.2. Darstellung der vier Arten von Aussagen in Syllogismen in Venn-Diagrammen: allgemein bejahend (a) "Alle M sind P" (links oben: schraffiert ist der leere Bereich $M \wedge \neg P$); allgemein verneinend (e) "Kein M ist P" (links unten: schraffiert ist der leere Bereich $M \wedge P$); partikulär bejahend (i) "Ein(ige) M sind P" (rechts oben; da das Verhältnis zu S offen ist, ist der Punkt auf der Linie eingetragen); partikulär verneinend (o) "Einige M sind nicht S" (rechts unten; wiederum muß der Punkt auf der Linie liegen).

Die **Anordnung** der Kreise ist eigentlich unwesentlich; wir verabreden, den Mittelbegriff M oben mittig zu zeichnen. Dann geben die beiden unteren Kreise die Konklusion wieder (in der Form PxS), die beiden Kreise rechts die obere Prämisse (mit dem Oberbegriff P) und die beiden Kreise links die untere Prämisse (mit dem Unterbegriff S).

Als Beispiele für die Darstellung von Syllogismen sollen die Modi Barbara und Darii (beide erste Figur) sowie Ferison und Bocardo (beide dritte Figur) dienen:

Modus Barbara:

Alle Menschen sind Philosophen.	MaP
Alle Sterblichen sind Menschen.	SaM
$\therefore$ Alle Sterblichen sind Philosophen.	$\therefore SaP$

Modus Darii:

Alle Menschen sind Philosophen.	MaP
Ein(ige) Sterbliche sind Menschen.	SiM
$\therefore$ Ein(ige) Sterbliche sind Philosophen.	$\therefore SiP$

Modus Ferison:

Kein Mensch ist ein Philosoph.	MeP
Ein(ige) Menschen sind Sterbliche.	MiS
$\therefore$ Ein(ige) Sterbliche sind keine Philosophen.	$\therefore SoP$

Modus Bocardo:

Ein(ige) Menschen sind keine Philosophen.	MoP
Alle Menschen sind Sterbliche.	MaS
$\therefore$ Ein(ige) Sterbliche sind keine Philosophen.	$\therefore SoP$

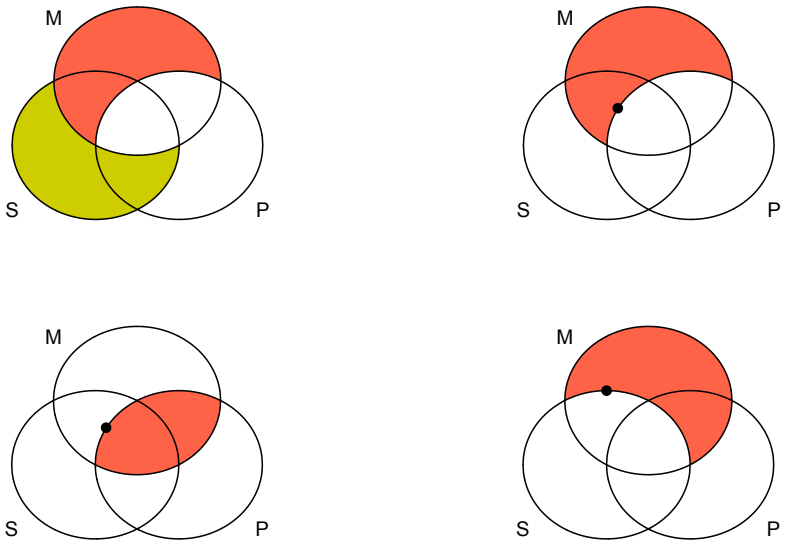


Abb. A.3. Die Modi Barbara (oben links), Darii (oben rechts), Ferison (unten links) und Bocardo (unten rechts) im Venn-Diagramm.

In den beiden unteren Kreisen kann man jeweils die Konklusion ablesen. Wie die Prämissen zusammenwirken, zeigt im Modus Barbara die unterschiedliche Einfärbung der beiden allgemeinen Prämissen; in den drei anderen Fällen zeigt sich das Ineinandergreifen darin, daß der Punkt stets an einen eingefärbten Bereich angrenzt.

B. Präsuppositionen

B.1. Präsuppositionen und Folgerungen
B.2. Frege, Russell und Strawson: Existenzpräsuppositionen
B.3. Semantische Präsuppositionen: Konstanz unter (innerer) Negation
B.4. Logik, Linguistik, Sprachphilosophie

B.1. Präsuppositionen und Folgerungen

Bei einer Klasse von 'Schlüssen' (in einem weiten Sinn) kann man verschiedener Auffassung sein, ob man sie als logische Folgerungen auffassen möchte; ein klassisches Beispiel findet sich bei Gottlob Frege:

> Kepler starb im Elend.
> *Demnach:* Es gab jemanden namens Kepler.[143]

Die eine Sichtweise ist, daß es sich um eine logische Folgerung handelt: daß mit dem Satz 'Kepler starb im Elend' durchaus ausgesagt wird, daß es jemanden namens Kepler gab – nur eben nicht ausdrücklich, sondern versteckt. Eine logische Analyse könne aber diese Teilaussage hervorbringen, und dann könne man durchaus von einer logischen Folgerungsbeziehung sprechen.

Die andere Sichtweise ist, daß hier keine logische Folgerung vorliegt, sondern eine sog. **Präsupposition**, d. h. eine 'Voraussetzung'. Gemeint ist: Daß es jemanden Namens Kepler gab, sei eine Voraussetzung dafür, daß der Satz [144] 'Kepler starb im Elend' überhaupt sinnvoll ist – aber dies sei nicht Teil dessen, was in dem Satz 'Kepler starb im Elend' tatsächlich *ausgesagt* wird. Man sollte hier, dieser Sicht zufolge, entsprechend nicht von Prämisse und Konklusion reden, sondern den Fall in die größere Klasse, die der Präsuppositionen, eingruppieren, für die eigene Regeln gelten.

Wir betrachten zunächst in Kürze die Anfänge der Diskussion und dann die Eigenschaften von Präsuppositionen (bes. die der sog. semantischen Präsuppositionen). Das Kapitel endet mit einer Abwägung des Für und Wider – mit dem Ergebnis, daß die

[143] Wir schreiben hier bewußt informeller '*Demnach:*' anstelle des Folgerungsstrichs, um uns die Antwort auf die Frage offenzuhalten, ob diese Schlüsse als (semantische) Folgerungen verstanden werden sollen.
[144] Kann eine Aussage (Proposition) Präsuppositionen haben?

Frage nicht zuletzt daran hängt, ob man an Sätzen oder Äußerungen interessiert ist (Linguistik und Sprachphilosophie) oder an Propositionen (Logik).

B.2. Frege, Russell und Strawson: Existenzpräsuppositionen

Gottlob Frege, der das Phänomen entdeckte, sprach nicht von 'Präsuppositionen', sondern einfach von '(notwendigen) Voraussetzungen' dafür, daß eine Aussage eine 'Bedeutung' hat. Er entdeckte das Phänomen einmal im Kontext von sog. Kennzeichnungen und Eigennamen ('Der die elliptische Gestalt der Planetenbahnen entdeckte [Kepler] starb im Elend') und von Temporalsätzen (Frege orientierte sich bei der logischen Analyse an der (deutschen) Sprache).[145] Hier seine Überlegungen (*Über Sinn und Bedeutung*, 1892):

> Wenn man etwas behauptet, so ist immer die Voraussetzung selbstverständlich, daß die gebrauchten einfachen oder zusammengesetzten Eigennamen eine Bedeutung haben. Wenn man also behauptet, 'Kepler starb im Elend', so ist dabei *vorausgesetzt*, daß der Name 'Kepler' etwas bezeichne; aber darum ist doch im Sinne des Satzes 'Kepler starb im Elend' der Gedanke, daß der Name 'Kepler' etwas bezeichne, nicht enthalten. Wenn das der Fall wäre, müßte die Verneinung nicht lauten 'Kepler starb nicht im Elend', sondern 'Kepler starb nicht im Elend, oder der Name "Kepler" ist bedeutungslos'. Daß der Name 'Kepler' etwas bezeichne, ist vielmehr *Voraussetzung* ebenso für die Behauptung 'Kepler starb im Elend' wie für die entgegengesetzte.[146]

Bertrand Russell (*On Denoting*, 1905) widersprach. Russell untersuchte nicht Eigennamen ('Kepler'), sondern sog. **Kennzeichnungen** (denoting phases) – Ausdrücke der Form 'Der (die, das) X ist …', die eine bestimmte Person oder Sache kennzeichnen.[147] Er analysierte Aussagen der Art 'Der die elliptische Gestalt der Planetenbahnen entdeckte, starb im Elend' als komplexe Aussagen, die eigentlich besagen: 'Es gibt jemanden (oder etwas), der entdeckte die elliptische Gestalt der Planetenbahnen, und zwar genau einen, und der starb im Elend.' Die Negation (Satznegation) besagt dann eigentlich: 'Es stimmt nicht, daß es jemanden oder etwas gibt, und zwar genau eins, der oder die oder das Kepler heißt und im Elend starb'. Die Aussagen verbinden also

[145] Vgl. Gottlob Frege, Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* N. F. 100 (1), 1892, S. 25–50, hier. S. 36 (33 Patzig); Frege behandelt u.a. die 'ungerade [indirekte] Rede', Objektsätze und Finalsätze, Subjektsätze usw.

[146] Ib., S. 40 = S. 36 (Patzig); Hervorhebungen C.M. Beachten Sie, daß Frege hier von '*der* Verneinung' spricht (also annimmt, es gebe genau eine).
Freges zweites Beispiel betrifft Temporalsätze: "Den Sinn des Satzes 'nachdem Schleswig-Holstein von Dänemark losgerissen war, entzweiten sich Preußen und Österreich' können wir auch wiedergeben in der Form 'nach Losreißung Schleswig-Holsteins von Dänemark entzweiten sich Preußen und Österreich'[.] Bei dieser Fassung ist es wohl hinreichend deutlich, daß als Teil dieses Sinnes nicht der Gedanke aufzufassen ist, daß Schleswig-Holstein einmal von Dänemark losgerissen ist, sondern daß dies die notwendige Voraussetzung dafür ist, daß der Ausdruck 'nach der Losreißung Schleswig-Holsteins von Dänemark' überhaupt eine Bedeutung habe." (Ib., S. 42 Anm. 10 = S. 38 (Patzig).)

[147] Bertrand Russell, On Denoting. *Mind* N.S. 14 (56), 1905, S. 479–493.

eine Existenzaussage, eine Einzigkeitsaussage und Eigenschaftsaussage.[148]

Dies hat zwei Konsequenzen: Erstens kann man nicht einfach von 'der' Negation des Satzes reden – er verbindet sind ja drei Aussagen. Zweitens ist die Existenzbehauptung einfach ein Teil der Gesamtaussage – und wenn sie nicht zutrifft, ist die Satz nicht sinnlos, sondern einfach falsch:

> Now it is plain that such propositions do *not* become nonsense merely because their hypotheses are false. The king in 'The Tempest' might say, 'If Ferdinand is not drowned, Ferdinand is my only son'. Now 'my only son' is a denoting phrase, which, on the face of it, has a denotation when, and only when, I have exactly one son. But the above statement would nevertheless have remained true if Ferdinand had been in fact drowned.[149]

Dem wiederum widersprach 1950 **Peter Strawson** in dem Artikel *On Referring*: Die Aussage 'The king of France is wise' sei nicht *falsch*, wenn Frankreich keinen König habe, sondern *sinnlos*. Russell ignoriere, wie Sätze dieser Art gemeint seien und wie man mit ihnen sprachlich umgehe (etwa auf sie reagiere), und daß Sätze überhaupt kontextabhängig seien (es hängt etwa davon ab, wann der Satz geäußert wird, ob (gerade) es einen König Frankreichs gibt). Strawson interessierte sich für *Äußerungen* ("Suppose some one were now to *utter* the sentence, 'The present king of France is wise'."[150]). Im Wortlaut:

> To say, 'The king of France is wise' is, in some sense of 'imply', to *imply* that there is a king of France. But this is a very special and odd sense of 'imply'. 'Implies' in this sense is certainly not equivalent to 'entails' (or 'logically implies'). And this comes out from the fact that when, in response to this statement, we say (as we should) 'There is no king of France', we should certainly *not* say that we were *contradicting* the statement that the king of France is wise. We are certainly not saying that it's false. We are, rather, giving a reason for saying that the question of whether it's true of false simply doesn't arise.[151]

Strawson bevorzugt die folgende Beschreibung: Der fragliche *Satz* ist nicht wahr oder falsch; ein Sprecher kann ihn aber in einer bestimmten Situation *äußern* und damit eine (wahr oder falsche) Behauptung (assertion) ausdrücken. Auf Strawson geht der Ausdruck Präsupposition (presupposition) zurück.[152]

[148] Zur Analyse Russells vgl. Abschnitt 10.5.
Diese Analyse löste für Russell noch einige weitere 'Rätsel', z. B.: (1) Ist Scott der (identisch mit dem) Autor von *Waverley*, sollte man 'Scott' und 'the author of *Waverley*' in wahren Sätzen austauschen können: "Now George IV. wished to know whether Scott was the author of *Waverley*; and in fact Scott the author of *Waverley*. Hence we may subsitute *Scott* for *the author of "Waverley,"* and thereby prove that George IV. wished to know whether Scott was Scott." (ib., 485) (2) Gemäß dem Tertium non datur muß entweder gelten 'the present king of France is bald' oder 'the present king of France is not bald' – aber den gegewärtigen König von Frankreich findet man unter kahlen noch unter den nicht-kahlen Dingen.

[149] Ib., 484; Hervorhebung im Original.

[150] Ib., 321; Hervorhebung C. M.

[151] P. F. Strawson, On Referring. *Mind* N. S. 59 (235), 1950, S. 320–344; hier: 330; Hervorhebungen im Original.

[152] Vgl. Miller 1998, S. 80–83 und S. 268–270.

B.3. Semantische Präsuppositionen: Konstanz unter (innerer) Negation

Sowohl Frege als auch Strawson verweisen auf eine bestimmte Eigenschaft von Präsuppositionen, die sog. **Konstanz unter Negation**, die in der Tat für logische Folgerungen seltsam erscheint: Der Satz 'Es gab jemanden namens Kepler' ist läßt sich nicht nur aus dem Satz 'Kepler starb im Elend' (sagen wir:) erschließen (ist eine notwendige Voraussetzung dafür, daß dieser Satz eine Bedeutung hat), sondern auch aus deren *sprachlicher Verneinung*:

Kepler starb *nicht* im Elend.
Demnach: Es gab jemanden namens Kepler.

Dies ist, für eine logische Folgerung, ungewöhnlich. Zwar gibt es keinen offenen Widerspruch zur semantischen Folgerung – diese fordert ja nur: *Wenn* 'Kepler starb im Elend' wahr ist, dann ist 'Es gab jemanden namens Kepler' wahr. Aber allgemein [153] kann man in gültigen Folgerungen Prämissen nicht negieren:

Bacon *didn't* write *Hamlet*.
If Bacon wrote *Hamlet*, Bacon was a great writer.
Folglich: Bacon was a great writer

ist eben keine gültige Folgerung. Die Konstanz unter Negation ist das definitorische Merkmal sog. **semantischer Präsuppositionen**:

Definition. Ein Satz S hat die **semantische Präsupposition** (präsupponiert) P genau dann, wenn gilt: Wenn S wahr oder falsch ist, ist P wahr.

Man könnte also sagen: Die Konklusion einer Folgerung ist (in einem bestimmten Sinn) wahr, *weil* oder *insofern* die Prämissen wahr sind; die Präsupposition (Voraussetzung) eines Satzes ist wahr, *weil* oder *insofern* dieser wahr oder falsch ist (also wahrheitsdefinit: eine Aussage im Sinne unserer Bestimmung) ist.

Die Sprachphilosophie und Linguistik haben Strawsons Begriff der Präsupposition aufgenommen; man klassifiziert sie nach dem sog. Präsuppositionsauslöser (presupposition trigger):

Eigennamen:

Kepler starb im Elend.
Präsupponiert: Es gab jemanden namens Kepler.

Kennzeichnungen: Sätze mit Ausdrücken der Form 'Der (die, das) X ist …', die ein Individuum eindeutig bestimmen:

The king of France is (isn't) bald.
Präsupponiert: There is (presently) a king of France.

[153] Wenn die Prämissen nicht 'überflüssig' sind.

Faktive Verben (factive verbs): Dies sind Verben, die einen Objektsatz einleiten und die Aussage des Objektsatzes als wahr (als Tatsache) voraussetzen:

> Einstein knew (didn't know) that $E = mc^2$.
> *Präsupponiert:* $E = mc^2$

Das für die Philosophie wichtigste Beispiel faktiver Verben ist 'wissen' (wegen seiner Bedeutung in Teilen der Erkenntnistheorie), aber auch 'erkennen, daß …', 'entdecken, daß …' usw.

Temporalsätze:

> Nachdem Schleswig-Holstein von Dänemark (nicht) losgerissen war, entzweiten sich Preußen und Österreich.
> *Präsupponiert:* Schleswig-Holstein war von Dänemark (nicht) losgerissen.

Es gibt eine Reihe weiterer Präsuppositionsauslöser, z. B. implikative Verben wie 'es schaffen' ('He succeeded in finishing the essay' präsupponiert 'He tried to finish the essay'), Verben der Zustandsänderung ('He quited smoking' präsupponiert 'He used to smoke'), aber auch Fragen ('Did Kepler die in misery?' präsupponiert 'Kepler died' und 'Kepler lived') uam.

B.4. Logik, Linguistik, Sprachphilosophie Ob man 'Schlüsse' der Art

> Kepler starb im Elend.
> *Demnach:* Es gab jemanden namens Kepler.

mit Russell als logische Folgerungen oder mit Frege und Strawson als Voraussetzungen/Präsuppositionen auffassen möchte, hängt nicht zuletzt am jeweiligen Erkenntnisinteresse: Interessiert man sich für semantische Beziehungen zwischen Aussagen (also für Logik), spricht einiges für Russells Herangehensweise; interessiert man sich die Funktionsweise der natürlichen Sprache (also für Linguistik), ist Strawsons Herangehensweise, also die Behandlung als Präsupposition, fruchtbarer. Die Sprachphilosophie verbindet naturgemäß beide Interessen.

C. Literatur

Beckermann, Ansgar (2011). *Einführung in die Logik*. 3. Auflage, Berlin, New York: De Gruyter.

Bostock, David (2007). *Intermediate Logic*. Oxford: Clarendon Press.

Cohen, Morris R., Ernest Nagel (1993). *An Introduction to Logic*. 2nd ed., Indianapolis/Cambridge: Hackett.

Copi, Irving M., Carl Cohen (1990). *Introduction to Logic*. New York: Macmillan.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Jörg Flum, Wolfgang Thomas (1994). *Mathematical Logic*. 2nd ed., New York: Springer.

Hamblin, Charles Leonard (1970). *Fallacies*. London: Methuen & Co.

Hoyningen-Huene, Paul (1998). *Formale Logik. Eine philosophische Einführung*. Stuttgart: Reclam.

Kneale, William, Martha Kneale (1962). *The Development of Logic*. Oxford: Clarendon.

Lepore, Ernest, with Sam Cummings (2009). *Meaning and Argument: An Introduction to Logic Though Language*. 2nd. ed., Chichester: Wiley-Blackwell.

Oberschelp, Arnold (1992). *Logik für Philosophen*. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.

Papineau, David (2012). *Philosophical Devices: Proofs, Probabilities, Possibilities, and Sets*. Oxford: Oxford University Press.

Priest, Graham (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*. 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press.

Sainsbury, Mark (2001). *Logical Forms: An Introduction to Philosophical Logic*. 2nd ed., Oxford: Blackwell.

Salmon, Wesley (1973). *Logic*. 2nd. ed., Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Tomassi, Paul (1999). *Logic*. New York: Routledge.

Tugendhat, Ernst, Ursula Wolf (1983). *Logisch-semantische Propädeutik*. Stuttgart: Reclam.

Wilholt, Torsten (2014). *Logik und Argumentation*. Hannover (`tinyurl.com/wilholtlogik`).

D. Symbole

Logische und semantische Folgerungsbeziehung, metasprachliches Vokabular

$\therefore$ und ———	logische Folgerungsbeziehung (zumal zwischen Aussagen i.G.z. Sätzen)
$A \models B$	semantische Folgerungsbeziehung (einfaches Turnstyle; Gültigkeitszeichen)
$\models A$	Allgemeingültigkeit von A; Tautologie
$A \models$	Widersprüchlichkeit von A; logische Inkonsistenz
$A \iff B$	Äquivalenz

Aussagen, Wahrheitswerte

A, B, C usw.	Abkürzungen für Aussagen (nicht kursiv)
w	wahr (der Wahrheitswert)
f	falsch (der Wahrheitswert)

Aussagenlogik

p, q, r usw.	Elementarsätze der Sprache AL; 'Satzbuchstaben'
A, B, C usw.	Platzhalter (allgemein); in der AL: Sätze; Formeln (kursiv)
Γ, Σ usw.	Mengen von Sätzen bzw. Formeln
$\neg$	Negation (auch – oder $\sim$); 'nicht'
$\wedge$	Konjunktion (auch $\cdot$ oder &); 'und'
$\vee$	Adjunktion (Disjunktion); 'einschließendes oder'
$\supset$	Subjunktion (materiales Konditional; auch $\rightarrow$); 'wenn … dann'
$\equiv$	Bisubjunktion (materiales Bikonditional; auch $\leftrightarrow$); 'genau dann … wenn'
(…) und […]	Klammern als Hilfszeichen
$\mathcal{J}(A)$	Interpretation des Satzes A
$\mid A \mid$	Bewertung des Satzes A (auch $[[A]]$)

Prädikatenlogik

a, b, w_1 usw.	Individuenkonstanten

x, y, z, x_1 usw.	(Individuen-)Variablen
A, B, B_1 usw.	Prädikatbuchstaben (auch mit Angabe der Stelligkeit: F^2ab)
$=$	logische (Prädikat-)Konstante '$=$'
$\forall x\ (\alpha)$	Allquantor (auch: $(x)\ (\alpha)$ oder $\bigwedge x\ (\alpha)$)
$\exists x\ (\alpha)$	Existenzquantor (auch: $(Ex)\ (\alpha)$ oder $\bigvee x\ (\alpha)$)
$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$	Junktoren
$(\ldots)$ und $[\ldots]$	Klammern als Hilfszeichen
α, β, ϕ usw.	(beliebiger) Ausdruck oder Satz/Formel (schematische Formelbuchstaben[154])
Γ, Υ, Σ usw.	(beliebige) Satzmenge/Formelmenge
$\hat{a}$, $\hat{b}$ usw.	beliebige/schematische Individuenkonstanten und/oder Individuenvariablen
$\hat{A}$, $\hat{B}$ usw.	beliebige/schematische Prädikatbuchstaben

Kalküle

$\vdash$	(einfaches oder syntaktisches) Turnstyle; Ableitungszeichen
$\Sigma \vdash \phi$	ϕ ist im Kalkül K aus Σ ableitbar
$\vdash \phi$	ϕ ist im Kalkül K ein Theorem (beweisbar)

Geläufige Abkürzungen

gdw.	genau dann, wenn / dann und nur dann, wenn
iff	if and only if
wff	well-formed formula (wohlgeformter Ausdruck; in AL: Satz)
AL; a.l.	Aussagenlogik; aussagenlogisch
PL; p.l.	Prädikatenlogik; prädikatenlogisch

[154] Als schematische Formelbuchstaben stehen in der PL griechische Buchstaben anstelle lat. Großbuchstaben, um Verwechslungen mit Prädikatbuchstaben zu vermeiden.

Nachbemerkung

Diese Einführung in die Grundlagen der Logik geht auf Vorlesungen an der Abteilung Philosophie der Universität Bielefeld im Sommersemester 2015 und Wintersemester 2015/2016 zurück. Sie soll eine Einführung in die (formale) Logik geben; diese ist aber wenngleich der Hauptgegenstand nur eines unter mehreren Themen. Versucht wurde, vier Themen in ihren Verbindungen zu behandeln (gelungen ist dies freilich nur in Teilen): formale Logik, Metalogik, Geschichte der Logik und Beziehungen der Logik zu anderen Forschungsfeldern.

Hauptthema ist die formale Logik, bes. die Aussagenlogik und Prädikatenlogik erster Stufe. Der Schwerpunkt liegt nicht auf dem formalen Apparat und dessen Leistungen (das Entscheidungsproblem ist vielleicht das Grundproblem der mathematischen, nicht aber der philosophischen Logik). Im Zentrum steht eine formallogische *literacy*, d. h. ein selbständiger Umgang mit Formalisierungen und ein Verständnis für Motivationen und Entscheidungen, die bestimmten Formalisierungen zugrundeliegen. (Hier braucht es eine gewisse Vertrautheit, die wohl nur durch Übung erreicht wird – aber mit der Vertrautheit ist das Ziel der Übung hier auch weitgehend erreicht. Auf Baumkalküle usw. wird verzichtet.)

Zur *literacy* gehört auch ein sicherer Gebrauch der logischen Begrifflichkeit (im Deutschen wie im Englischen): man sollte über Aussagen, Aussagen-Schemata und logische Beziehungen wie der der logischen Folgerung sprechen können. Der Sprachgebrauch in der Philosophie variiert, und daher ist auch im folgenden Text der Sprachgebrauch teils (bewußt) variierend (z. B. hinsichtlich der Frage, ob Tautologien als 'allgemeingültige' oder als 'logisch wahre' Sätze bezeichnet werden).

Versucht wurde zweitens eine Verbindung der formalen Logik mit *metalogischen* Fragen. Hier verdankt der Text im Ansatz und der Durchführung viel der Behandlung Paul Hoyningen-Huenes (auf dessen *Einführung* oft verwiesen wird). Die formale Logik als Gegenstand einer Betrachtung bietet auch einen Fundus an Beispielen für eine Form von Begriffsbildungs- und Darstellungsidealen – etwa Definitionen, rekursive Verfahren, der Darstellungsform more geometrico usw. –, die unabhängig vom Gegenstand wissenswert sind.

Die Behandlung ist drittens in Teilen *historisch* in dem Sinn, daß erstens – in Mach-

schen Sinn – auch der Entstehungskontext und die Motivation und die Probleme behandelt werden. Weiterhin werden immer wieder auch alternative Möglichkeiten betrachtet, teils auf Kosten einer Vertiefung. (Ein Beispiel ist die Behandlung sowohl axiomatischer (Hilbert) Kalküle wie auch von Gentzen-Kalkülen; ein anderes die Behandlung von Euler- neben Venn-Diagrammen.) Schließlich werden auch Teile der klassischen Logik mitbetrachtet (bis hin zur Terminologie zumal im Fall der Syllogismen – das Ziel ist hier eine auch historische *literacy*).

Viertens wurde versucht, die Beziehungen der formalen Logik zu anderen Forschungsfeldern, sowohl in der Philosophie wie in anderen Fächern, wenigstens anzudeuten, z. B. zur Sprachphilosophie (Identitätsaussagen), zur Erkenntnistheorie (Beziehung von logischer und nicht-logischer Wahrheit) oder zur Linguistik (Folgerungsbeziehungen vs. Präsuppositionen; Beziehung von aussagenlogischen Junktoren zu sprachlichen Ausdrucksformen, etwa von Subjunktionen zu Konditionalsätzen).

Der Darstellung liegen folgende Ziele und Überlegungen zugrunde: Erstens soll – auch in einem einführenden Text – die Betrachtung am Ende auf (offene) Fragen führen. (Das unerreichte Ideal in dieser Hinsicht ist Ian Hackings *Introduction to Probability and Inductive Logic*.) Zweitens wird vergleichsweise ausführlich auf weiterführende Literatur verwiesen – weiterführende Texte, abweichende Behandlungen, aber auch klassische Arbeiten. Der letzte Gesichtspunkt ist, daß der Text kurz ausfallen sollte.

Dank schulde ich vor allem Sonja Krause und Michael Kaup, die die Vorlesung im Wintersemester 2015/2016 als Tutoren begleitet und mich vor Fehlern und Uneindeutigkeiten bewahrt haben; ebenfalls Dank schulde ich den Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Vorlesung für Fragen und zumal für Hinweise auf Fehler im Text, besonders David Brandhorst, Niklas Eickhoff, Vera Hessen, Florence Köster, Clemens Litfin, Kerstin Malone, Eric Alexander Meier, Nils Müller, Marvin Rosner, Malena-Antonia Schweppe, Anika Stooß, Katharina Ußling und Ali Yasar. Für Hinweise und Anmerkungen danke ich besonders Gerson Reuters, Stephan Schlothfeldt und Fabian Wendt. Der Text wurde in TEX/LATEX gesetzt; die Graphiken wurden in R geschrieben. – Verbesserungsvorschläge und Hinweise auf Fehler sind willkommen.